Balogh Arthur

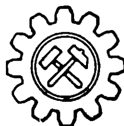
A LOGARLÉC



NEHÉZIPARI KÖNYVKIADÓ

BALOGH ARTHUR

A LOGARLÉC



NEHÉZIPARI KÖNYV- ÉS FOLYÓIRATKIADÓ VÁLLALAT

1954

A szöveget ellenőrizte:
CSOMA ZSIGMOND

ETO: 681.143

Felelős kiadó: Solt Sándor
Felelős szerkesztő: Sándor István   Műszaki felelős: Rózsa István

Megrendelve: 1954. X. 5. — Imprimálva: 1954. XII. 2 — Papiralak: 70/100
Azonossági szám: 1536 — Ív terjedelem: (8½—B/6 ív) — Ábrák száma: 68
Példányszám: 10 000

54-15962 — Egyetemi Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Janka Gyula

ELŐSZÓ

A logarléc nélkülözhetetlen segédeszköze minden teschnikusnak, de — bátran mondhatjuk — úgyszólván minden dolgozónak, aki gyakran számol. Mégis sokan inkább elvégzik a hosszadalmas számításokat, vagy különböző számolási táblázatokat használnak ahelyett, hogy egyszer hosszabb időt szánnának a logarléc kezelésének alapos elsajátítására. Pedig mindazoknak, akiknek nem kell teljes pontossággal számolniok, a lécelés megtanulására fordított idő igen hamar megtérül.

E léckezelési könyvem célja, hogy az olvasó előtt feltárjam azt a széles területet, ahol a logarléc rendkívül előnyösen használható. Ennek érdekében röviden át kellett tekinteni a logaritmussal való számolás lényegét. Az elmélet ismeretében az olvasó maga is kidolgozhatja majd azokat az eljárásokat, melyekkel a saját munkaterületén előforduló számításokat egyszerűsítheti és gyorsíthatja.

Azoknak viszont, akik — talán kezdetben — csak a logarléc kezelésére és a legfontosabb műveletek elsajátítására fektetik a súlyt, az elméleti bevezetésből egyes részeket fölösleges elolvasniok, nevezetesen a „Hatvány logaritmusa" c. részt (11. és 12. oldal), valamint az „Átszámítás tetszőleges alapú logaritmusra" c. fejezetet (18. és 19. oldal) és nem kell foglalkozniok az úgynevezett „természetes" logaritmussal sem. Ugyanígy a III. F. fejezettel kezdődő rész tanulmányozása is későbbre halasztható.

Amikor azonban a kezdő bátorítására a fentiek alapján több kérdésben engedményeket teszek, nyomatékosan hangsúlyozom, hogy a tanulónak az alapos léckezelés elsajátítása céljából a skálaolvasásról szóló részeket igen gondosan kell áttanulmányoznia és csak akkor szabad

áttérnie a logarléccel végezhető műveletek kérdésére, amikor a logarléc skáláin már könnyen és jól tud tájékozódni. Nem győzöm ezt kellően aláhúzni, mert a skálaolvasás alapjában véve nem nehéz dolog, éppen ezért sokan hajlamosak arra, hogy e kérdésen csak átfussanak, viszont amikor már a műveletek helyes elvégzésére kell összpontosítani a figyelmet, akkor a skálaolvasásban mutatkozó bizonytalankodás komoly zavarokat okozhat.

Ugyancsak fontosnak tartom, hogy az olvasó a számjegyszámokra vonatkozó szabályokat megtanulja és alkalmazza. Sok mérnök kartársam is elhanyagolja ezt a kérdést és fejből számítja ki, hány egész és tizedes számból áll az eredmény. Ez a módszer egyszerű számításoknál célravezető lehet ugyan, de az olvasó észreveszi majd, hogy bonyolultabb esetekben mennyivel gyorsabb és biztonságosabb, ha számjegyszámokkal dolgozunk.

A nyomda a tördeléskor igyekezett az ábrákat arra az oldalra tenni, ahol a vonatkozó szöveg található. Ha ez helyenkint mégsem sikerült, nem okoz nehézséget, hiszen az olvasónak tulajdonképpen nem az ábrát, hanem az ábra alapján beállított logarlécét kell figyelnie, vagyis a szöveg mellé ilyenformán mindig rendelkezésre áll az „ábra”.

A szöveg és az ábrák zöme elsősorban a legelterjedtebb magyar gyártmányú logarlécet, a „Gamma 2512”-t mutatja be, de kitértem más rendszerek ismertetésére is. Így bármilyen általános léce van az olvasónak — bízom benne, hogy — e könyv segítségével el tudja sajátítani a logarléc kezelését.

Budapest, 1954. december.

Balogh Arthur

I. A LOGARITMUS

A számolás logarléccel bizonyos számtani előismereteket kíván. A következőkben röviden átismételjük a legfontosabb alapfogalmakat. Természetesen arra az anyagra térünk ki részletesebben, amely a logarléccel szoros kapcsolatban áll.

A számtani műveletek osztályozása

Elsőrendű műveletnek nevezzük az összeadást és a kivonást. Másodrendű művelet: a szorzás és osztás, mert a szorzás összeadásra, az osztás szorzásra vezethető vissza. Harmadrendű művelet: a hatványozás és a gyökvonás, mert — mint látni fogjuk — a hatványozás szorzásra vezethető vissza, a gyökvonás pedig a hatványozás műveletének megfordítása.

A hatvány fogalma

A szorzat tényezőkből áll. Különleges az az eset, ha a szorzat tényezői egyenlők. Lássunk erre példát.

Példa: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$

Ez tehát olyan szorzat, amelynek tényezői egyenlők. Ez az írásmód azonban túl kényelmetlen, különösen ha a tényezők száma megnövekszik. Ezért egyszerűbb jelölést vezetünk be. A 3-at, amely egyike az egyenlő tényezőknek, *alapnak* nevezzük. E szám fölé írjuk az egyenlő tényezők számát. Esetünkben a tényezők száma 4, tehát a 3 fölé

4-et fogunk írni. Ez a szám a *kitevő*, amely jelzi az egyenlő tényezők számát. E jelöléssel

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81.$$

Az eredmény *a hatvány.*

Tehát 3 új fogalommal ismerkedtünk meg, mégpedig : *az alappal, a kitevővel és a hatvánnyal.*

Ha az alapot felemeljük a kitevőre, eredményül a hatványt kapjuk.

Példa: Hogyan jelöljük a következő szorzatot: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000$.

Jelölésünk szerint: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6 =$ $= 1\,000\,000$.

Az algebra jelöléseit használva, tehát ha a számok helyébe betűt írunk, a hatvány alakja :

$$a^n = b,$$

ahol a az alap, n a kitevő és b a hatvány.

Példa: Számítsuk ki annak a négyzetnek a területét, amelynek minden oldala 5 cm.
A négyzet területe $= 5 \cdot 5\ \text{cm}^2 = 5^2\ \text{cm}^2 = 25\ \text{cm}^2$.

Példa: Számítsuk ki a kocka köbtartalmát, amelynek élhossza 10 cm.

A kocka köbtartalma $10 \cdot 10 \cdot 10\ \text{cm}^3 = 10^3\ \text{cm}^3 =$ $= 1000\ \text{cm}^3$.

Példa: Számítsuk ki a következő szorzatot : $10^2 \cdot 10^3$.
Írjuk ki e szorzatot részletesen :

$$10^2 \cdot 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5 = 10^{2+3}$$

Az algebra jelöléseivel :

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Ebből a következő szabályt olvashatjuk le:

Egyenlő alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.

Példa: $\frac{10^4}{10^2}$ számítandó ki.

Írjuk ki részletesen:

$$\frac{10^4}{10^2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10} = 10 \cdot 10 = 10^{4-2}.$$

Ha ismét az algebrában szokásos betűket használjuk:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Ebből azután a következő szabályt olvashatjuk le:

Egyenlő alapú hatványokat úgy osztunk, hogy az alapot az osztandó és osztó kitevőinek különbségére emeljük.

A logaritmus lényege

A hatvány általános alakja a következő:

kitevő

alap ——————— $a^n = b$ ——————— hatvány

E kifejezésben 3 mennyiség szerepel. Ha közülük bármelyik kettő ismeretes, a harmadik ismeretlen kiszámítható. Vegyük sorra a különböző eseteket. Az ismeretlent x-szel jelöljük.

1. eset. Adott az alap és a kitevő, keressük a hatványt. Ebben az esetben a hatvány az ismeretlen, tehát

$$a^n = x.$$

Erre az előzőkben láttunk példát.

2. eset. Adott a kitevő és a hatvány, keressük az alapot. Ebben az esetben az alap az ismeretlen, tehát

$$x^n = b.$$

Az a művelet, amellyel az ismeretlent megkapjuk, a gyökvonás, és erre a következő jelet használjuk:

$$x = \sqrt[n]{b}.$$

Ha e kifejezésben $n = 2$, akkor a művelet négyzetgyökvonás, ha $n = 3$, akkor köbgyökvonás.

Példa: Keressük 1000-nek a harmadik gyökét. Tehát

$$x^3 = 1000.$$

Keressük azt a számot, amelynek harmadik hatványa 1000. Ismeretes, hogy ez a szám 10, mert $10^3 = 1000$.

3. eset. Adott az alap a és a hatvány b, keressük a kitevőt. Ebben az esetben a kitevő az ismeretlen, tehát

$$a^x = b.$$

Amint a gyökvonásra jellegzetes jelet vezettek be, erre az esetre is külön jelet kell bevezetni, amelyen felismerhető az alap és a hatvány, mert e kettő adott. A jel a következő:

$$x = {}^a\log b,$$

amelyet a következőképpen olvasunk:

$x = a$ alapú logaritmusa a b-nek,

vagy röviden: $x = a$ alapú logaritmus b.

Az ${}^a\log b$ tehát kitevőt jelent, amelyre az alapot, a-t felemelve, eredményül a hatványt kapjuk.

Példa: $10^x = 1000$.

Keressük tehát azt a számot, amelyre 10-et felemelve, 1000-et kapunk. Az eredmény előre ismeretes, mert tudjuk, hogy 10-nek harmadik hatványa 1000. Ha a kitevőkeresés e műveletére a logaritmus jelzést használjuk, akkor

$$\text{kitevő} = x = {}^{10}\log 1000 = 3.$$

Azt a logaritmust, amelynél az alap 10, *tízes alapú vagy Briggs-féle logaritmusnak* nevezzük.

A 10 alapú logaritmus esetén a logaritmus jelzésekor az alap kiírását elhagyjuk, és egyszerűen a következőt írjuk:

$$x = \lg 1000 = 3.$$

Ez a jelzés azt mondja, hogy ha 10-et felemeljük a harmadik hatványra, az eredmény 1000.

Tehát a logaritmus nem más, mint a hatvány kitevője.

Természetesen bármilyen más alapú logaritmussal is számolhatunk, de a 10 alapú logaritmus egyszerűségénél fogva a legjobban felel meg a gyakorlati követelményeknek. Egyébként, ha valamely szám 10 alapú logaritmusát ismerjük, akkor bármely más alapú logaritmusát egyszerű számtani művelettel számíthatjuk ki, amint azt később látni fogjuk.

A 10 alapú logaritmusokat, tehát azokat a kitevőket, amelyekre 10-et felemelve a hatványt kapjuk, kiszámították, és az eredményeket táblázatba foglalták. Ezek az ú. n. *logaritmustáblázatok.*

Példa: Számítsuk ki 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000 logaritmusát. Ismeretes, hogy

$$10^1 = 10,\quad 10^2 = 100,\quad 10^3 = 1000,\quad 10^4 = 10\,000,\quad 10^5 = 100\,000,\quad 10^6 = 1\,000\,000.$$

Ezek alapján e számok logaritmusa a következő :

$$\lg 10 = 1, \quad \lg 100 = 2, \quad \lg 1000 = 3, \quad \lg 10\,000 = 4,$$
$$\lg 100\,000 = 5, \; \lg 1\,000\,000 = 6.$$

Mint érdekességet említjük meg, hogy e számok logaritmusa 1-gyel kisebb, mint a hatvány számjegyeinek száma.

Műveletek logaritmussal

Szorzat logaritmusa

Példa: Válasszunk két egyenlő alapú hatványt és szorozzuk őket össze :

$$10^2 \cdot 10^3 = 100 \cdot 1000 = 10^{2+3} = 100\,000.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy $\lg 100 = 2$ és $\lg 1000=3$, továbbá $\lg 100\,000 = 5$, és ha ezeket az értékeket behelyettesítjük az $5 = 2 + 3$ egyenlőségbe, akkor

$$\lg (100 \cdot 1000) = \lg 100\,000 = \lg 100 + \lg 1000.$$

Ha a számok helyett betűket használunk :

$$\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b.$$

A szabály a következő :

A szorzat logaritmusát úgy számítjuk ki, hogy a tényezők logaritmusait összeadjuk.

Ezzel a művelettel a szorzást összeadásra, tehát a másodrendű számtani műveletet a logaritmus segélyével elsőrendű számtani műveletre vezettük vissza.

Hányados logaritmusa

Példa: Válasszunk ismét két egyenlő alapú hatványt, azonban ezúttal a két hatványt osszuk el egymással.

$$\frac{10^5}{10^2} = \frac{100\,000}{100} = 1000 = 10^{5-2} = 10^3.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy lg 100 = 2, lg 1000 =3, lg 100 000 = 5 és hogy 5—2 = 3, akkor a megfelelő logaritmusértékeket helyettesítve:

$$\lg \frac{100\,000}{100} = \lg 1000 = \lg 100\,000 - \lg 100.$$

Az algebrában használatos betűket alkalmazva:

$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b.$$

Ebből a következő szabályt olvashatjuk ki:

A hányados logaritmusát úgy számítjuk ki, hogy az osztandó logaritmusából levonjuk az osztó logaritmusát.

Ezzel a művelettel az osztást kivonásra, tehát elsőrendű számtani műveletre vezettük vissza a logaritmus segítségével.

Hatvány logaritmusa

Példa: Válasszunk egy hatványt: 10^2 és az egészet emeljük a harmadik hatványra. Az eredmény a következő:

$$(10^2)^3 = 100^3 = 10^6.$$

Ámde lg 100 = 2 és 2 · 3 = 6. Behelyettesítve a 2 értékét:

$$3 \cdot \lg 100 = 6.$$

Ha a számok helyébe ismét betűket írunk:

$$\lg a^n = n \cdot \lg a.$$

Ebből pedig a szabály:

Hatvány logaritmusát úgy számítjuk ki, hogy a kitevőt szorozzuk a hatványalapjának logaritmusával.

Példa: Számítsuk ki 0,1, 0,01 és 0,001 logaritmusát.

$$\lg 0{,}1 = \lg \frac{1}{10} = \lg 1 - \lg 10 = 0 - 1 = -1.$$

$$\lg 0{,}01 = \lg \frac{1}{100} = \lg 1 - \lg 100 = 0 - 2 = -2.$$

$$\lg 0{,}001 = \lg \frac{1}{1000} = \lg 1 - \lg 1000 = 0 - 3 = -3.$$

Ha az eredményeket megfigyeljük, azt találjuk, hogy tiszta tizedesszám esetén az eredmény mindig 1-gyel nagyobb negatív szám, mint a tizedesvessző utáni 0-ok száma. Ezek alapján felírhatjuk pl.: $\lg 0{,}000001 = -6$.

A logaritmus szerkezete

Most következő számításainkhoz a logaritmustáblázatot használjuk fel. Keressük a táblázatban 4 logaritmusát és azt találjuk, hogy

$$\lg 4 \cong 0{,}6,$$

ami más szóval annyit jelent, hogy $10^{0,6} \cong 4$.

Miután ismerjük a táblázat segítségével a 4 logaritmusát, számítsuk ki e szám többszörösének logaritmusát. Ehhez felhasználjuk az előzőkben levezetett szabályokat.

Példa: Számítsuk ki lg 40-et, ha ismerjük lg 4-et.
$\lg 40 = \lg (10 \cdot 4) = \lg 10 + \lg 4 = 1 + 0{,}6 = 1{,}6.$

Példa: Számítsuk ki lg 400-at.

$\lg 400 = \lg (100 \cdot 4) = \lg 100 + \lg 4 = 2 + 0{,}6 = 2{,}6.$

Példa: Számítsuk ki lg 4000-et.

$\lg 4000 = \lg (1000 \cdot 4) = \lg 1000 + \lg 4 = 3 + 0{,}6 = 3{,}6.$

Példa: Számítsuk ki lg 0,4-et, ha lg 4-et ismerjük.

$$\lg 0{,}4 = \lg \frac{4}{10} = \lg 4 - \lg 10 = 0{,}6 - 1.$$

Példa: Számítsuk ki lg 0,04-ot.

$$\lg 0{,}04 = \lg \frac{4}{100} = \lg 4 - \lg 100 = 0{,}6 - 2.$$

Példa: Számítsuk ki lg 0,004-et.

$$\lg 0{,}004 = \lg \frac{4}{1000} = \lg 4 - \lg 1000 = 0{,}6 - 3.$$

A közölt példákból megállapíthatjuk a logaritmus szerkezetét. E célból foglaljuk össze az eddig feldolgozott példák eredményeit.

	Számjegyek száma	A logaritmus egészszámjegye
lg 4 = 0,6	1	0
lg 40 = 1,6	2	1
lg 400 = 2,6	3	2
lg 4000 = 3,6	4	3
	Tizedesvessző utáni 0-ok száma	A negatív előjel utáni jegyek
lg 0,4 = 0,6 — 1	0	1
lg 0,04 = 0,6 — 2	1	2
lg 0,004 = 0,6 — 3	2	3

A logaritmus, mint ezek az eredmények mutatják, két részből áll, akár egészszámról, akár tizedesszámról van szó, az egyik egész, a másik tizedesszám.

Az egyik rész egészszámjegyek esetén a számjegyek számával, tiszta tizedesszám esetén a tizedesvessző utáni zérusok számával van kapcsolatban.

A logaritmusnak ez a része, amely kapcsolatban van a számjegyekkel, illetőleg a tizedesvessző utáni 0-ok számával: a *logaritmus karakterisztikája.*

A logaritmusnak az a másik része, amely független a szám jegyeinek helyértékétől, illetve a tizedesvessző utáni 0-ok számától, *a logaritmus mantisszája.*

A felsorolt példákban a mantissza véges-végig 0,6. A mantissza mindig 1-nél kisebb szám.

A karakterisztikára nézve pedig a következő szabályt állíthatjuk fel:

A karakterisztika egészszám esetén 1-gyel kisebb, mint a számjegyek száma.

A karakterisztika tizedesszám esetén 1-gyel nagyobb szám, mint a tizedesvessző utáni zérusok száma, de negatív előjellel.

A karakterisztikát vegyesszám esetén kizárólag az egészszámjegyek alapján állapítjuk meg a fenti szabály szerint.

A következőkben tárgyalásaink egyszerűsítése céljából számjegyszámon nemcsak az egészszámok számjegyeit értjük, hanem az 1-nél kisebb, tehát tiszta tizedesszámoknál a tizedesvessző utáni 0-ok számát is.

Összefoglalva:

A 10 alapú logaritmus tehát két részből áll, éspedig a karakterisztikából, amelyet a számjegyek száma alapján állapitunk meg és a mantisszából, amely 1-nél kisebb szám és a logaritmustáblázatokból olvasható ki.

A logarléc kezelésekor a karakterisztika helyett a számjegyek számát használjuk, amit annál is inkább tehetünk, mert e kettő csak állandóban tér el egymástól. Ez a módszer a léckezelést — mint azt a későbbi példákon látni fogjuk — igen megkönnyíti.

A számjegyek számának megállapítása

A logarléc kezelésekor vagy röviden léceléskor, a számjegyszámok használatára térünk át és ezért néhány példán a számjegyszámok megállapítását mutatjuk be.

Példa:

Szám	23050	1470	132	256,6	27	36,45
Számjegyszám	5	4	3	3	2	2
Szám	8	6,25	3,266			
Számjegyszám	1	1	1			

Példa:

Szám	0,2	0,023	0,0037	0,00065	0,0000125
Számjegyszám	0	—1	—2	—3	—4

A számjegyszámokkal kapcsolatban felhívjuk a figyelmet arra, hogy

két egymásután következő — jel pozitív (+) értéket ad.

Példa: $-4-(-5)=-4+5=1$.

E példában az 5 előtt két — jel van, tehát az eredmény +, azaz +5-öt kell —4-hez hozzáadni.

A logaritmikus skála szerkesztése

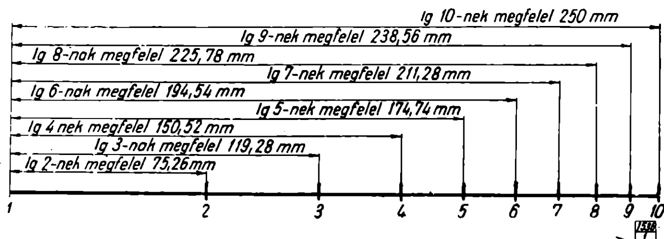
Ha a logaritmus értékeit ábrázolni kívánjuk, az ábrázolandó mennyiséget hosszá alakítjuk át, mert ábrázolni csak hosszat lehet. Az ábrázoláshoz egységet kell választani, amelyet megszorozva az ábrázolandó mennyiséggel, megkapjuk az őt jelképező hosszat.

Megállapítjuk a szóbanforgó szám logaritmusát és ezzel a választott egységet megszorozzuk. Az egység általában 250 mm. Pontosabb lécekhez 500 mm, zseblécekhez 125 mm vagy annál kisebb egységet választanak.

A szerkesztési táblázatban az 1—10-ig terjedő néhány szám logaritmusát kiszámítottuk. A hozzájuk tartozó hosszakat úgy kapjuk meg, hogy logaritmusaikat megszorozzuk a választott egységgel, 250 mm-rel. Ezeket az adatokat felhasználhatjuk pl. 500 mm hosszegység esetére is, csak az eredményeket 2-vel kell megszorozni.

Ha a hosszegység 125 mm, akkor a táblázat adatainak felét kell venni.

Az 1. ábrában a 250 mm hosszegységnek megfelelő logaritmusértékeket kótáztuk be. Közbenső értékeket teljesen hasonlóan rajzolhatunk, más szóval tetszőleges



1. ábra

alosztásokat jelölhetünk be. Ezen az alapon készülnek a logarlécek összes skálái.

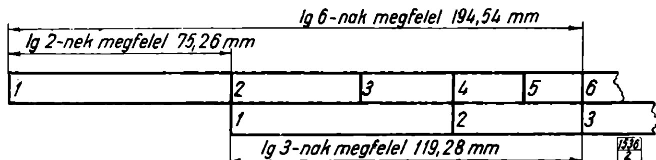
Szerkesztési táblázat

lg 1 = 0,	megszorozva ezzel 250 (mm)-t	0	
lg 2 = 0,301,	megszorozva ezzel 250 (mm)-t	75,26	mm
lg 3 = 0,477,	megszorozva ezzel 250 (mm)-t	119,28	mm
lg 4 = 0,602,	megszorozva ezzel 250 (mm)-t	150,52	mm
lg 5 = 0,699,	megszorozva ezzel 250 (mm)-t	174,74	mm
lg 6 = 0,778,	megszorozva ezzel 250 (mm)-t	194,54	mm
lg 7 = 0,845,	megszorozva ezzel 250 (mm)-t	211,27	mm
lg 8 = 0,903,	megszorozva ezzel 250 (mm)-t	225,78	mm
lg 9 = 0,954,	megszorozva ezzel 250 (mm)-t	238,56	mm
lg 10 = 1,	megszorozva ezzel 250 (mm)-t	250	mm

A logaritmus és a logarléc kapcsolata

A 10—11. oldalon megállapítottuk, hogy logaritmus használata esetén a szorzás összeadássá, az osztás kivonássá egyszerűsödik. Magát a logaritmust hosszal is ábrázoltuk.

Ha tehát a logaritmusnak ezt az értékes tulajdonságát a logarlécen fel akarjuk használni, akkor a szorzás művelete hosszak összeadására és az osztás hosszak kivonására egyszerűsíthető.

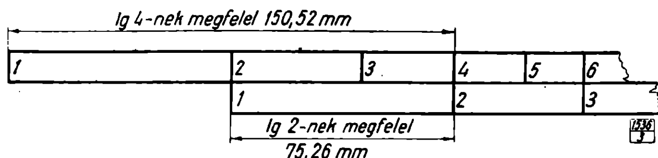


2. ábra

A logarléccel való szorzás és osztás műveletét a 2. és 3. ábrán mutatjuk be, és mint látjuk, ehhez két egymáson mozgó skála szükséges.

A 2. ábrán a következő műveletet szemléltetjük:

$$\lg (2 \cdot 3) = \lg 2 + \lg 3 = 75{,}26 \text{ mm} + 119{,}28 \text{ mm} = \\ = 194{,}54 \text{ mm} = \lg 6.$$



3. ábra

Amint a 2. ábrán láthatjuk, a lg 2-nek megfelelő hosszhoz: 75,26 mm-hez hozzáadtuk a lg 3-nak megfelelő hosszat: 119,28 mm-t. Az eredmény lg 6. A művelet lebonyolítása céljából a mozgó skála (nyelv) 1-ét a fix skála 2-e alá helyezzük és a mozgó skála 3-ánál leolvassuk

az eredményt: 6-ot. Mint látható, két hosszat adtunk össze és ezzel elvégeztük a szorzást.

Megjegyezzük, hogy magán a skálán a jelzésekhez csak a számot írjuk, a *logaritmus* szót elhagyjuk.

A 3. ábrán az osztás műveletét ábrázoltuk, éspedig a következő példára:

$$\lg \frac{4}{2} = \lg 4 - \lg 2 = 150{,}52 \text{ mm} - 75{,}26 \text{ mm} =$$
$$= 75{,}26 \text{ mm} = \lg 2.$$

Amint azt a 3. ábrán látjuk, a lg 4-nek megfelelő hosszból: 150,52 mm-ből levontuk a lg 2-nek megfelelő hosszat: 75,26 mm-t. Az eredmény lg 2 = 75,26 mm.

A lécelés lebonyolítása céljából a fix skála 4-hez állítjuk a mozgó skála 2-ét és az 1-es helyen leolvassuk az osztás eredményét: 2-t. Mint látható, két hosszat kivontunk és ezzel az osztást elvégeztük.

Hasonló módon végezzük el a következő osztást:

$$\lg \frac{6}{36} = \lg 6 - \lg 36.$$

Ismét a lg 6-nak megfelelő hosszból levontuk a lg 3,6-nek megfelelő hosszt és a mozgó skála 1-énél leolvassuk az osztás eredményét: 0,166-et.

Átszámítás tetszőleges alapú logaritmusra

Ha ismerjük valamely szám 10 alapú logaritmusát, akkor más alapú logaritmusát a következő képlettel számoljuk át:

$$^{a}\log m = \frac{\lg m}{\lg a}.$$

Az átszámítás szabálya a következő:

A hatvány 10 alapú logaritmusát elosztjuk az újonnan választott alap 10 alapú logaritmusával.

A magasabb matematikában gyakrabban szerepel az ú. n. természetes logaritmus, amelynek alapja:

$$e = 2,718281\ldots\ldots$$

Ebben az esetben a megállapított jelzésünk szerint a kitevő:

$$x = {}^{e}\log b.$$

Ez más szóval annyit jelent, hogy e felemelve az x kitevőre, a hatványt, b-t adja.

A természetes logaritmusnak van különleges jelzése (ln), amellyel az alap kiírását elkerülhetjük: $x = \ln b$

A következő egyenlőség áll fenn:

$$\ln 10 \cdot \lg e = 1,$$

ahol $\lg e = 0{,}434$ és $\ln 10 = 2{,}302$.

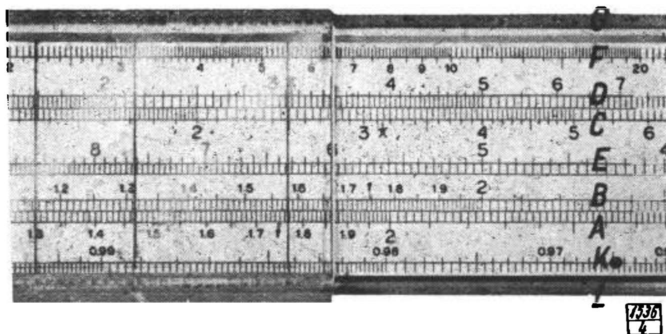
A már ismertetett képlet alapján:

$$\ln m = \frac{\lg m}{\lg e} = \frac{\lg m}{0{,}434} = 2{,}302 \cdot \lg m.$$

II. A LOGARLÉC SZERKEZETE

A logaritmikus skálát a számolás céljaira felrakhatjuk körhenger felületére, körlapra vagy lécre. Műszaki célokra általában a lécet használják, éspedig pontosabb számításokhoz 500 mm skálahosszal, általános használatra 250 mm skálahosszal és végül zseblogarlécet 125 mm vagy ennél kisebb skálahosszal.

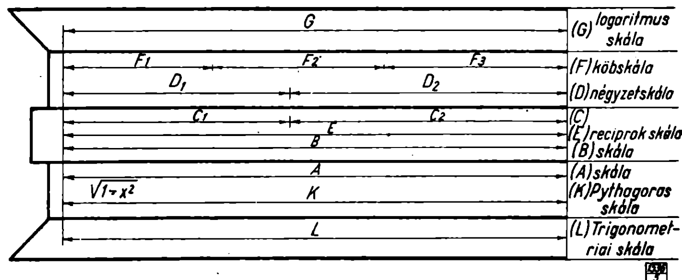
A „Gamma 2512" léc a 4. ábrán látható.



4. ábra. A „Gamma 2512" típusú logarléc

A logarléc a léctestből, a nyelvből és a futóból áll. A léctesten, valamint a nyelv két oldalán vannak a skálák. A nyelv a léctest vájatában mozog. A gyors leolvasást segíti elő a futó, amely valamilyen keretbe foglalt üveglap, vagy pl. a „Gamma 2512" léc esetében átlátszó műanyagból készül. A futó üveglapján karcjelek (ú. n. hajszálvonalak) vannak, amelyek merőlegesek a skálák irányára. Régebben

csak egy karcjelet véstek a futó üveglapjára, újabban hármat, sőt néha ennél többet is vésnek. Ezek a karcjelek — mint azt a későbbiekben látni fogjuk — megkönnyítik, és meggyorsítják a léccel való számolást, vagy röviden a léckezelést. A többszörös karcjelek szerepét a megfelelő fejezetben fogjuk ismertetni.



5. ábra

Az 5. ábrán betűkkel jeleztük a „Gamma 2512" típusú léc skáláit.

Az *A és B skála a szorzás és osztás műveleteihez* való.

A *C és D skálát* ugyancsak a szorzás és osztás műveleteihez, ezenkívül azonban a *D* skálát még a négyzetreemeléshez és a négyzetgyökvonáshoz is használjuk.

E a reciprok skála.

F a köbszámítás skálája.

G a 10 alapú logaritmus skálája.

K a $\sqrt{1-x^2}$ *skálája.*

L a szögfüggvények skálája.

A *G* és az *L* skálák a léc oldalán vannak. A nyelv hátlapján lévő skálák jelzéseit és használatát a megfelelő fejezetben fogjuk ismertetni.

A léceket alkalmazásuk szerint a következőképpen osztályozhatjuk:

Általános vagy univerzális lécek, amelyek a közismert számtani műveletek elvégzésére készülnek.

Különleges vagy szakmai lécek, amelyekkel el lehet végezni a számtani műveleteket, azonban elsősorban különleges számítások elvégzésére szolgálnak.

Irányelvek a logarléc használatakor

A logarléc használatakor a következőket kell szem előtt tartani:

1. *A skálaolvasás*. A skála helyes olvasása alapja a logarléc kezelésének. A logarléccel végzendő műveletek megtanulásához csak akkor szabad fogni, ha a skálaolvasást már kellően elsajátítottuk.

2. *A műveletek elvégzése* és az eredmény számszerű leolvasása. Ilyenkor a tizedesvessző helyével nem törődünk.

A skálaolvasásnál tehát sohase törődjünk a számjegyek számával, illetve a tizedesvessző helyével, hanem kizárólag azzal, hogy a léc skáláiról a számokat olvassuk le. A tizedesvessző helyének megállapítását nem ajánlatos az eredmény leolvasásával összekapcsolni, mert akkor súlyos tévedések keletkezhetnek.

3. *A tizedesvessző helyének megállapítása.*

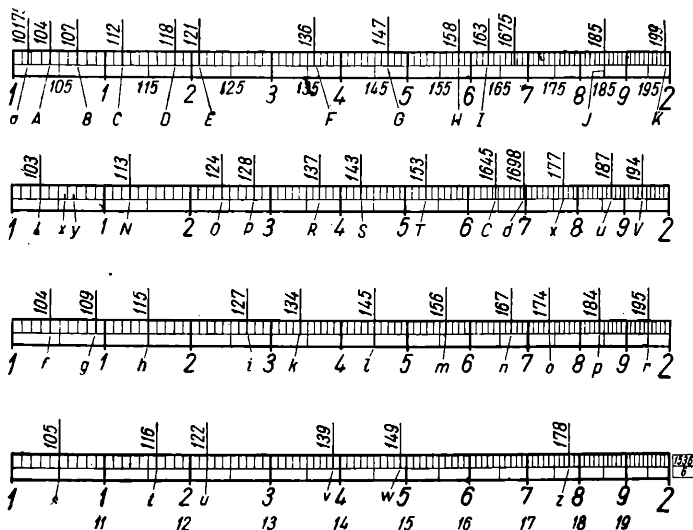
Skálaismeret

A skála szerkezete és olvasása

A skálákat az alosztások szempontjából osztályozzuk, mert ez szabja meg a leolvasható számjegyek számát. A skálák rendszerei a következők:

I. skála. Ezt a típusú skálát a 6. ábrán láthatjuk. Jellemzője, hogy két főosztás között 10 alosztás van.

Így pl. 11 és 12 között az alosztások száma 10. Megjegyezzük, hogy némely lécnél 11 helyett 1-et, 12 helyett 2-t stb. találunk. Ismételten hangsúlyozzuk, hogy a skálaolvasásnál a tizedesvessző helyével foglalkozni nem szabad,



6. ábra

hiszen példaképpen felemlíthetjük, hogy a 6. ábrán 125 helyén éppen úgy leolvashatunk 12,5-et vagy 0,125-et, mint 0,00125-et is.

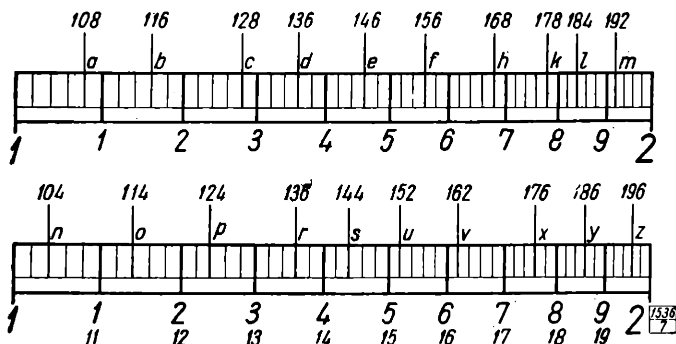
A logaritmikus skála a lécen oly kicsiny, hogy minden egyes jelzéshez nem tanácsos számokat beírni, mert a léc áttekinthetetlenné válnék. Ezért fontos a skálaolvasás gyakorlása. E célból a skálákat lerajzoltuk és az egyes jelekhez betűket írtunk. A betűk mellé a jel számértékét írtuk. Természetesen a tizedesvessző a leolvasásnál nem szerepel.

Az I. típusú skálát az jellemzi, hogy 3 számjegyet pontosan olvashatunk le, a további számjegyeket becsléssel.

Példák az I. skála jelzéseinek leolvasására

A	jelnél	104	*L*	jelnél	103	*a*	jelnél	10175	*n*	jelnél	167
B	„	107	*N*	„	113	*c*	„	1645	*o*	„	174
C	„	112	*O*	„	124	*d*	„	1698	*p*	„	184
D	„	118	*P*	„	128	*f*	„	104	*r*	„	195
E	„	121	*R*	„	137	*g*	„	109	*s*	„	105
F	„	136	*S*	„	143	*h*	„	115	*t*	„	116
G	„	147	*T*	„	153	*i*	„	127	*u*	„	122
H	„	158	*X*	„	177	*k*	„	134	*v*	„	139
I	„	163	*U*	„	187	*l*	„	145	*x*	„	1058
J	„	185	*V*	„	194	*w*	„	149	*y*	„	1068
K	„	199	*Z*	„	178	*m*	„	156			

II. skála. Ilyen típusú skálát a 7. és 8. ábrán láthatunk. Jellemzője, hogy két főosztás között 5 alosztás

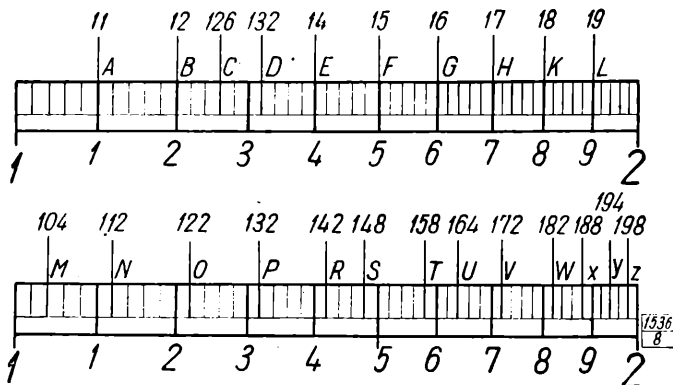


7. ábra

van, így pl. a 11 és 12 osztás között az alosztások száma 5. Megjegyezzük, hogy némely lécnél 11 helyett 1-et stb. találunk. Ezt a típusú skálát főleg zsebléceknél használják.

Bár itt is 3 számjegyet lehet leolvasni, azonban pl. 107-et már csak becsléssel lehet megállapítani.

A skála egyes jeleinek leolvasását, úgy mint az előzőkben, betűkkel jelöltük, ezek mellé írtuk a leolvasott értékeket.



8. ábra

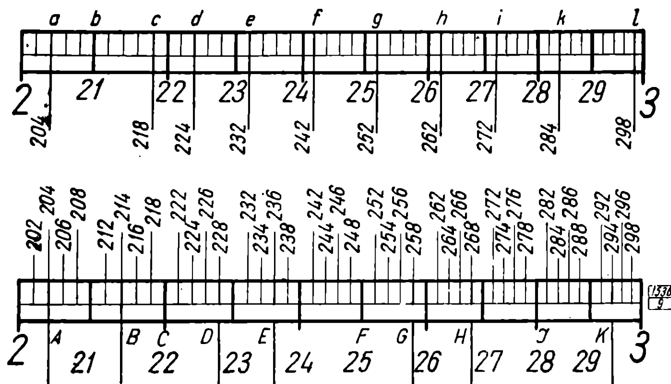
Ugyanilyen rendszerű skálát látunk a 9. ábrán, ahol a 2—3 közötti főosztásokat jelöltük be. E főosztások között ismét alosztások vannak. Így pl. 21 és 22 között 5 alosztás van, amelyek leolvasási értékeit ugyancsak megtalálhatjuk az ábrán.

A 10. ábrán hasonló szerkezetű skálát látunk. Az egyes betűjelzésekhez megtaláljuk a leolvasott számokat. Pl. a 31 és 32 alosztások közötti jelek számértékei:

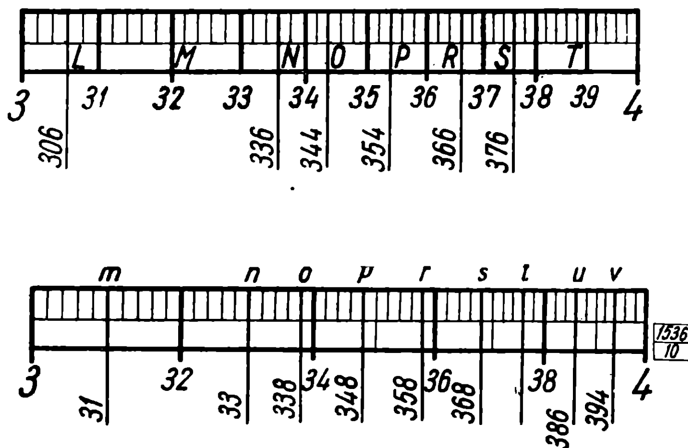
31, 312, 314, 316, 318, 32,

vagy a 39 és 4 közötti alosztások számértékei:

39, 392, 394, 396, 398, 4.

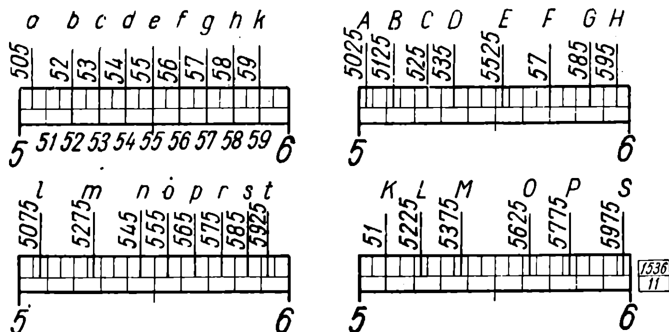


9. ábra.



10. ábra

III. skála. A 11. ábrán az 5 és 6 főosztás közötti, alosztások jeleinek megfelelő számokat írtuk be. A két főosztás között 10 alosztás van, amelyeket még felezünk. Tekintettel arra, hogy e skálatípusnál sok a leolvasási tévedés, a betűkkel jelzett leolvasásokat táblázatba foglaljuk.



11. ábra

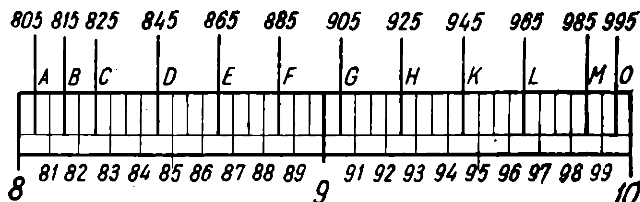
Példák a III. skála jeleinek leolvasására

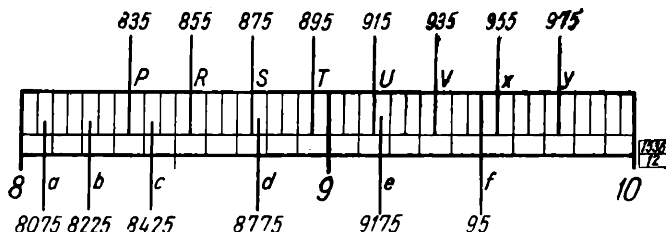
a	jelnél	505	*l*	jelnél	5075	*A*	jelnél	5025	*H*	jelnél	595
b	„	52	*m*	„	5275	*B*	„	5125	*K*	„	51
c	„	53	*n*	„	545	*C*	„	525	*L*	„	5225
d	„	54	*o*	„	555	*D*	„	535	*M*	„	5375
e	„	55	*p*	„	565	*E*	„	5525	*O*	„	5625
f	„	56	*r*	„	575	*F*	„	57	*P*	„	5775
g	„	57	*s*	„	585	*G*	„	585	*S*	„	5975
h	„	58	*t*	„	5925						
k	„	59									

A 12. ábrába bejelölt betűk melletti leolvasásokat ugyancsak táblázatba foglaltuk.

A	jelnél	805	*F*	jelnél	885	*M*	jelnél	985	*T*	jelnél	895
B	„	815	*G*	„	905	*O*	„	995	*U*	„	915
C	„	825	*H*	„	925	*P*	„	835	*V*	„	935
D	„	845	*K*	„	945	*R*	„	855	*X*	„	955
E	„	865	*L*	„	965	*S*	„	875	*Y*	„	975

a jelnél	8075	*d* jelnél	8775
b jelnél	8225	*e* jelnél	9175
c jelnél	8425	*f* jelnél	95



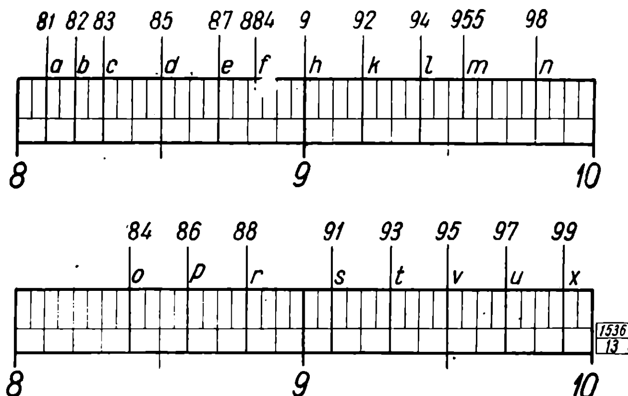


12. ábra

A 13. ábrán a fentivel egyenlő szerkezetű skálát találunk. A betűkkel jelzett leolvasásokkal a skálaolvasást gyakorolhatjuk és tökéletesíthetjük.

A III. típusú skálánál ugyancsak 3 számjegyet lehet leolvasni, de pl. a 812-t vagy 854-et a skálán már csak becsléssel jelölhetjük ki.

IV. skála. A 14. és 15. ábrán két főosztásjel között 10 alosztást találunk. Így pl. 5—6 vagy 8—9 között már csak 10 alosztás van. Ennél a skálatípusnál csak két

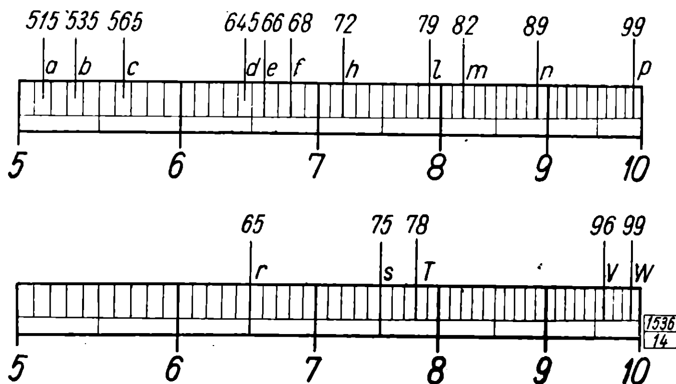


13. ábra

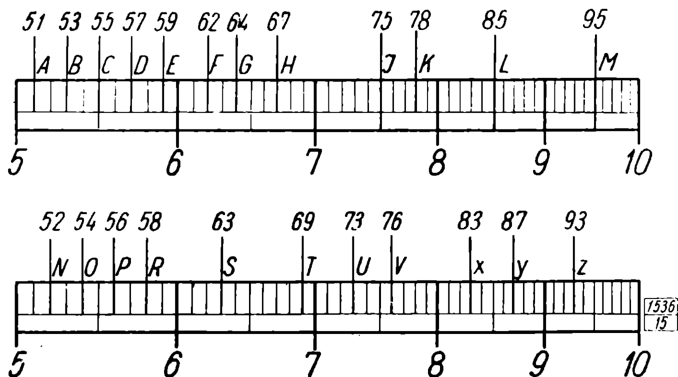
számjegyet olvashatunk le. E skálatípust főleg zsebléceken találjuk. A 14. ábra esetében a betűk melletti leolvasásokat a következő táblázatba foglaltuk :

Példák IV. skála jeleinek leolvasására

a jelnél	515	*m* jelnél	82
b „	535	*n* „	89
c „	565	*p* „	99
d „	645	*r* „	65
e „	66	*s* „	75.
f „	68	*T* „	78
h „	72	*V* „	96
l „	79	*W* „	99



14. ábra



15. ábra

A logarléc leolvasásának pontossága

Annál pontosabban számolunk a lécen, minél több számjegyet lehet a skálajelek felhasználásával leolvasni. A gyakorlati lécek skáláiról általában három számjegyet lehet leolvasni, zseblécecknél csak kettőt. Ha további számjegyek leolvasására van szükség, ezeket már csak becsléssel állapíthatjuk meg. Könnyen lehet az osztásjelek közötti felezést, továbbá a negyed és háromnegyed osztás helyét kijelölni, sőt bizonyos gyakorlat után további finomsággal is lehet becsülni.

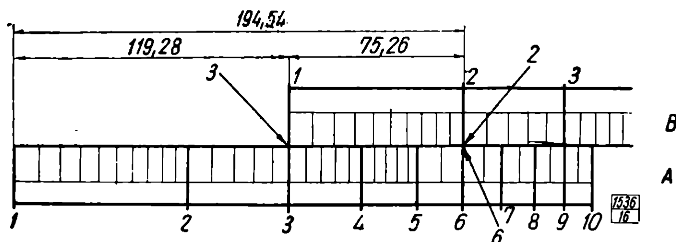
A léc némely skáláját meghosszabítják, néha más színnel jelölve. Ez a skálarészlet a szóbanforgó skála másik végének felel meg, és az a célja, hogy a skálavégeken túl, de hozzá közel eső leolvasások miatt ne kelljen a nyelvet eltolni. A „Gamma 2512" típusú lécnek pl. az *A*, *B*, *C*, *D* és *E* skálája van ily módon meghosszabbítva.

III. MŰVELETEK LOGARLÉCCEL

A) A szorzás

A lécen a szorzás műveletét a logaritmus segítségével összeadásra vezetjük vissza, éspedig hosszak összeadására, mint azt már a 10. oldalon ismertettük.

E művelet elvégzéséhez az *A* és *B* skálát használjuk, mert a lécen e skálákkal számolhatunk a legpontosabban. A későbbiek folyamán néhány különleges esetben a *C* és *D* skálát is igénybe fogjuk venni e művelet elvégzéséhez. A logarléc használatát a szorzás műveletéhez fokozatosan nehezebb példákon fogjuk bemutatni és a számjegyek számának leolvasása után ismertetjük azokat a szabályokat, amelyekkel az eredmények számjegyeinek számát, illetve a tizedesvessző helyét megállapíthatjuk.



16. ábra

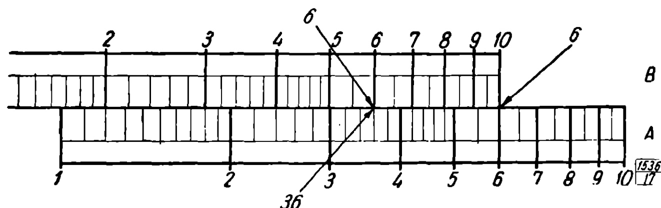
Példa: 2 · 3 = 6, ahol 2 és 3 a tényezők, és 6 a szorzat.

E példa léckezelése a következő: az *A* skálán megkeressük a 3-at és ide helyezzük a nyelv *B* skálájának 1-es jelét. A nyelv *B* skálájának 2-es jele az *A* skálán kijelöli az eredményt: 6-ot (16. ábra).

A művelet elvégeztével a nyelv jobbra áll ki, a tényezők jegyeinek száma pedig:

$$1 + 1 = 2,$$

viszont az eredmény egyjegyű, tehát ebben az esetben, (amikor a léc jobbra áll ki) a számjegyek összegéből 1-et le kell vonni.



17. ábra

Példa: $6 \cdot 6 = 36$.

E példa léckezelése a következő:

Az *A* skálán megkeressük a 6-ot. A nyelv *B* skálájának 1-es jelét fölébe helyezzük. Megkeressük a nyelven a 6-os jelét és az a meglepetés ér bennünket, hogy a 6-os jel kiesik a léctestből.

Ilyen esetben e lécet balra toljuk és a nyelv, tehát a *B* skála 10-ét helyezzük az *A* skála fölé és a *B* skála 6-ánál leolvassuk az eredményt: 36-ot (17. ábra).

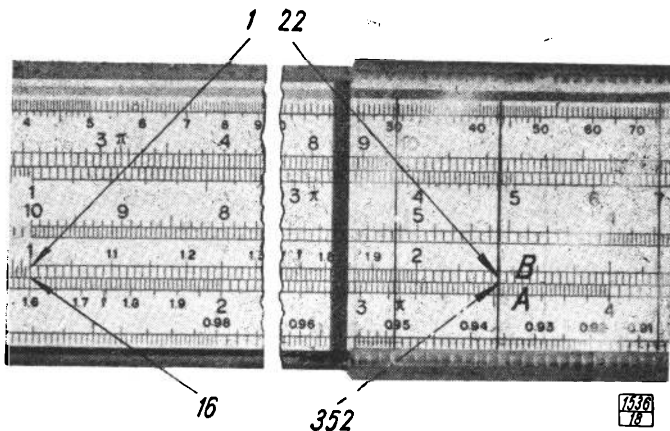
Ha most megfigyeljük a nyelv állását a számjegyek számával kapcsolatban, akkor azt találjuk, hogy ha a nyelv balra áll ki, akkor a szorzattényezők számjegyeinek összege adja az eredmény számjegyeit.

E szabály alkalmazását a következőkben fogjuk látni:

Példa: $16 \cdot 22 = 352$.

Megkeressük az *A* skálán a 16-ot. Föléje helyezzük a nyelv *B* skálájának az 1-ét. A *B* skála 22-es jelét keressük

és vele szemben az *A* skálán leolvassuk az eredményt (18. ábra).



18. ábra

A számjegyek száma: $2 + 2 = 4$, de mert a léc jobbra állt ki, 1-et le kell vonni. Tehát a számjegyek száma:

$$2 + 2 - 1 = 3.$$

Példa: $36 \cdot 42 = 1512$.

Az *A* skálán megkeressük a 36-ot. A nyelv *B* skálájának 10-es jelét fölibe helyezzük. A *B* skálán a futó karcjelével megkeressük a 42-t és vele szemben az *A* skálán leolvassuk az eredményt.

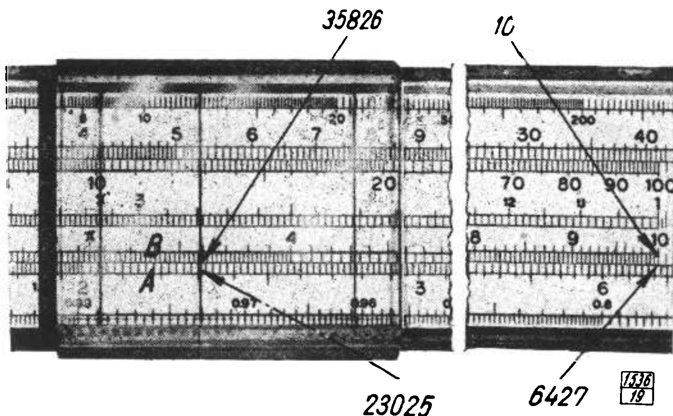
A számjegyek száma:

$$2 + 2 = 4$$

változatlan marad, mert a nyelv balra állt ki.

Példa: $6427 \cdot 35\,826 = 230\,250\,000$.

Ebben az esetben a skálaolvasásnál becsléshez kell folyamodnunk. Megkeressük az *A* skálán a 64 és 65 közötti osztás első negyedét. Ide helyezzük a futó karcjelét. E jelhez kerül a *B* skála 10-e és keressük a 358 és 360 közötti jel $^1/_4$ részének fekvését, majd az *A* skálán leolvassuk az eredményt.



19. ábra

A számjegyek száma :

$$4 + 5 = 9.$$

Kiszámításakor figyelembe vettük, hogy e művelet folyamán a nyelv balra állt ki (19. ábra).

Eddig olyan példákat dolgoztunk ki, amelyeknél a szorzat tényezői egészszámok voltak. Áttérünk olyan példákra, amelyekben tiszta tizedesszámok szerepelnek.

Példa: 36 · 0,007 = 0,252.

Megkeressük az *A* skálán a 36-ot, fölibe helyezzük a nyelv *B* skálájának 10-ét és a nyelv *B* skálájának 7-énél leolvassuk az eredményt : 252-t.

E számolás alatt nem törődünk a tizedesvessző helyével !

A számjegyek számának megállapításánál figyelembe kell venni a tizedesvessző utáni 0-ok számát, éspedig negatív előjellel, így tehát az eredmény számjegyeinek száma :

$$2 - 2 = 0,$$

megjegyezvén, hogy a művelet alatt a nyelv balra állt ki.

Példa: $0{,}00025 \cdot 125 = 0{,}0313$.

A léckezelés menete az eddigi példákból ismert, csak a tizedesvessző helyét állapítjuk meg. A számjegyek száma :

$$-3 + 3 - 1 = -4 + 3 = -1,$$

amelynél figyelembe vesszük, hogy a nyelv a művelet alatt jobbra állt ki. Az eredményben tehát a tizedes vessző után egy 0 áll.

Példa: $0{,}000025 \cdot 0{,}0000000127 = 0{,}000000000000317$.

Ebben a példában megmutatkozik annak az előnye, hogy a művelet elvégzése alatt nem foglalkozunk a tizedesvessző helyével, hanem azt az eredmény leolvasása után állapítjuk meg. A számjegyszám :

$$-4 - 7 - 1 = -12\,,$$

figyelembevéve, hogy a nyelv e művelet alatt jobbra állt ki.

Az eddigi példák alapján tehát látható, hogy a lécen való számolás két részre osztható, ú. m. :

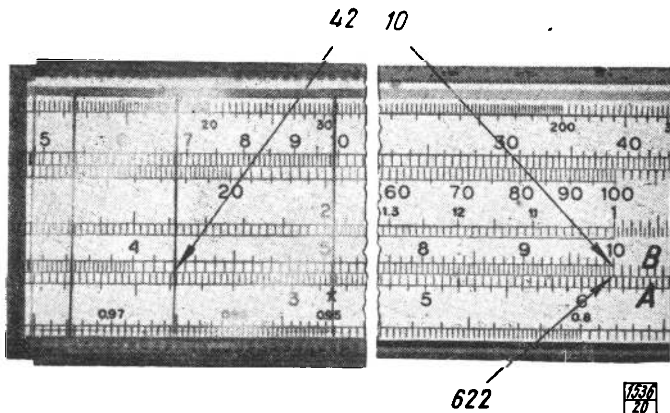
1. a művelet elvégzésére,
2. a tizedesvessző helyének megállapítására.

Most pedig áttérünk *2-nél több tényezőből álló szorzatnak* a logarlécen való kiszámítására. Látni fogjuk, hogy minél nehezebb a számolás, annál nagyobb könnyebbséget jelent

az, hogy a műveletek elvégzését nem keverjük össze a tizedesvessző helyének megállapításával.

A 2-nél több tényezőből álló szorzat számolását visszavezetjük két-két tényező szorzására és ezeket a szorzásokat egymásután végezzük el, amihez már a futót kell felhasználni.

Példa: 122 · 42 · 622 = 3 160 000.



20. ábra

Teljesen mindegy, hogy melyik két tényezővel kezdjük a számolást.

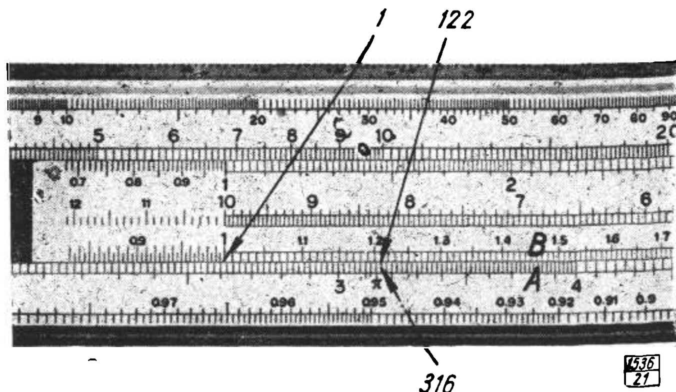
Kezdjük a 622 · 42-vel. Az *A* skálán beállítjuk a 622-t, ide illesztjük a *B* skála 10-ét. Megkeressük a *B* skálán a 42-t. Ide toljuk a futó karcjelét. Az eredményt nem olvassuk le! A nyelv a művelet alatt balra áll ki (20. ábra).

A futó karcjeléhez illesztjük a nyelv *B* skálájának 1-ét és megkeressük a 122-t. Az *A* skálán leolvassuk az eredményt, 316-ot. A nyelv jobbra áll ki (21. ábra).

A számjegyek száma :

$$3 + 2 + 3 - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Mint látható — és ez igen jellemző a logarléccel való számolásra — akárhány számmal végezzük is a legkülönbözőbb műveleteket, a közbenső leolvasások nem érdekelnek, csak a végeredményt olvassuk le.



21. ábra

Példa: 0,0037 · 26 · 0,527 = 0,0506.

Ismét az első két tényezővel végezzük el a szorzást és az eredményt a futóval rögzítjük, majd az eredményt szorozzuk a harmadik tényezővel. E művelet alatt a nyelv egyszer áll ki jobbra és így a számjegyszám :

$$-2 + 2 + 0 - 1 = -3 + 2 = -1.$$

Tehát az eredményben a tizedesvessző után egy 0 van.

Gyakorlásul áttérünk háromnál több tényezőből álló szorzat kiszámolására.

Példa: $\underbrace{239 \cdot 0{,}0027}_{\text{jobbra}} \cdot \underbrace{6248}_{\text{balra}} \cdot \underbrace{3627}_{\text{balra}} \cdot \underbrace{0{,}000028}_{\text{jobbra}} = 410.$

Az első két tényező szorzatához állítjuk a futót. Az eredményt nem olvassuk le, hanem szorozzuk a harmadik tényezővel. Az eredményhez állítjuk a futót és szorozzuk a negyedik tényezővel. Az eredményhez ismét odaállítjuk a futót és szorozzuk az ötödik tényezővel. Az eredményt megállapítjuk, és mert a nyelv kétszer állt ki jobbra, a számjegyek száma :

$$3 - 2 - 1 + 4 + 4 - 4 - 1 = 11 - 8 = 3.$$

Tehát az eredmény 3-jegyű szám. Mint látható, a lécelésnél nem kell törődni a közbenső leolvasásokkal, még kevésbbé érdekelnek bennünket a tizedesvessző helyei az egyes tényezőknél. Elvégezzük gyorsan az előírt műveleteket, feljegyezzük a nyelv állását és megállapítjuk a számjegyek számát, illetve a tizedesvessző helyét.

Példa:

$$729564 \cdot 0{,}000327 \cdot 328 \cdot 0{,}65 \cdot 27 \cdot 0{,}123 = 168000$$

A páronkénti szorzás végeredménye 168. Ha a számjegyeket kívánjuk megállapítani, akkor figyelembe véve, hogy a műveletek alatt a nyelv kétszer áll ki jobbra :

$$6 - 3 + 3 + 0 + 2 + 0 - 2 = 11 - 5 = 6,$$

tehát az eredmény hatjegyű.

Példa: $623 \cdot 0{,}00069 \cdot 0{,}0000087 \cdot 12970 \cdot 285 = 13{,}8.$

A szorzást páronként végezzük el és a részeredmény rögzítéséhez felhasználjuk a futót. A végeredmény 138. Hátra van még a tizedesvessző helyének megállapítása, figyelembe véve, hogy a művelet elvégzése alatt a nyelv egyszer állt ki jobbra. A számjegyek száma :

$$3 - 3 - 5 + 5 + 3 - 1 = 11 - 9 = 2,$$

tehát az eredményben az egészszámok száma 2.

A következő fejezetben lécbeállítási gyakorlatokat talál az olvasó. Ismertetjük a lécbeállításokat és az eredményt, továbbá magát a leolvasást kiírtuk szavakkal is. A lécbeállítási gyakorlatokkal kapcsolatos számolásokat néhány példán mutatjuk be.

Példa: $115 \cdot 5 = 575$.

A számjegyek száma: $3 + 1 - 1 = 3$, mert a nyelv egyszer jobbra állt ki.

Példa: $0{,}00115 \cdot 0{,}0005 = 0{,}000000575$.

A számjegyek száma: $-2 - 3 - 1 = -6$, tehát a tizedesvessző utáni zérusok száma: 6.

Példa: $0{,}000115 \cdot 50 = 0{,}00575$.

A számjegyek száma: $-3 + 2 - 1 = -2$, tehát tizedesvessző utáni zérusok száma: 2.

Példa: $128 \cdot 28 = 3580$.

A számjegyek száma: $3 + 2 - 1 = 5 - 1 = 4$, tehát a számjegyek száma: 4.

Példa: $115 \cdot 5 \cdot 128 \cdot 28 = 575 \cdot 3580 = 2\,060\,000$.

Az előző számolás anyagát használtuk fel és ez esetben a számjegyek száma: $3 + 4 = 7$.

Példa: $152 \cdot 25 = 3800$.

A számjegyek száma: $3 + 2 - 1 = 4$, tehát az eredmény számjegyeinek száma: 4.

Példa: $314 \cdot 58 = 18\,200$.

A számjegyek száma: $3 + 2 = 5$.

Példa: $152 \cdot 25 \cdot 314 \cdot 58 = 3800 \cdot 18\,200 = 69\,100\,000$.

A számjegyek száma az eredményben: $4 + 5 - 1 = 8$, mert a nyelv egyszer jobbra állt ki.

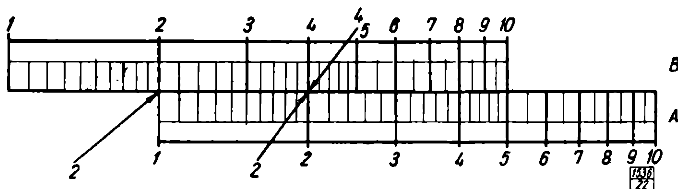
Lécbeállllási gyakorlalok

Léc-beállítás	Ered-mény	Beállítás leolvasása	Eredmény leolvasása
115 · 5	575	egyegyöt · öt	öthétöt
128 · 28	358	egykettőnyolc · kettőnyolc	háromötnyolc
152 · 25	38	egyötkettő · kettőöt	háromnyolc
22 · 30	66	kettőkettő · háromnulla	hathat
314 · 58	182	háromegynégy · ötnyolc	egynyolckettő
96 · 25	24	kilenchat · kettőöt	kettőnégy
104 · 206	214	egynullanégy · kettőnulla-hat	kettőegynégy
208 · 109	227	kettőnullanyolc · egynulla-kilenc	kettőkettőhét
2121 · 236	5	kettőegykettőegy · kettő-háromhat	öt
304 · 28	85	háromnullanégy · kettő-nyolc	nyolcöt
78 · 705	55	hétnyolc · hétnullaöt	ötöt
1055 · 214	226	egynullaötöt · kettőegynégy	kettőkettőhat
1695 · 248	42	egyhatkilencöt · kettőnégy-nyolc	négykettő
205 · 192	394	kettőnullaöt · egykilenc-kettő	háromkilenc-négy
4025 · 16	644	négynullakettőöt · egyhat	hatnégynégy
4575 · 175	8	négyöthétöt · egyhétöt	nyolc
5975 · 805	482	ötkilenchétöt · nyolcnullaöt	négynyolckettő
9025 · 25	226	kilencnullakettőöt · ket-tőöt	kettőkettőhat
8975 · 635	572	nyolckilenchétöt · hat-háromöt	öthétkettő
299 · 242	724	kettőkilenckilenc · kettő-négykettő	hétkettőnégy
1525 · 4325	66	egyötkettőöt · négyhárom-kettőöt	hathat
1725 · 2625	453	egyhétkettőöt · kettőhat-kettőöt .	négyöthárom

B) Az osztás

A logaritmus segítségével az osztás műveletét hosszszak kivonására vezetjük vissza, mint azt már a 11. oldalon ismertettük.

A művelet elvégzéséhez az A és B skálákat használjuk (néha a C és D skálát is, mint azt a későbbiekben látni fogjuk). Fokozatosan nehezebb példákon mutatjuk az



22. ábra

osztás műveletének elvégzését a lécen és a számjegyek leolvasása után áttérünk az eredmény számjegyeinek, illetőleg a tizedesvessző helyének a megállapítására.

Példa: $\frac{4}{2} = 2.$

E példa számjegyeinek beállítását a 22. ábrán látjuk. Az osztásnál tehát — eltérően a szorzástól — az osztót helyezzük a szám alá, és az 1-esnél, illetve 10-esnél olvasunk le.

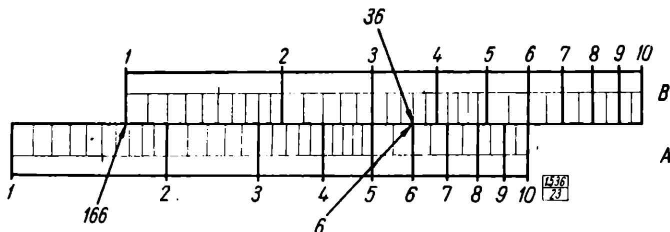
A szorzásnál az 1-et, illetve 10-et használtuk fel a beállításhoz.

Példa: $\frac{6}{36} = 0{,}166,$

ahol 6 az osztandó, 36 az osztó és 0,166 a hányados,

Az osztást a lécen a következőképpen végezzük el (23. ábra):

Az *A* skálán megkeressük a 6-ot és föléje helyezzük a nyelv *B* skálájának 36-os jelét. A nyelv *B* skálájának 1-esénél leolvassuk az eredményt: 166-ot. Megállapítjuk, hogy a lécelés alatt a nyelv jobbra állt ki, tehát a számjegyszámok különbségéhez egyet hozzáadunk.



23. ábra

A számjegyek száma:

$$1 - 2 + 1 = 0,$$

tehát a tizedesvessző után nincsen 0. Osztás esetén ugyanis a számjegyek számának megállapításakor az osztandó számjegyeiből *le kell vonni* az osztó számjegyeinek számát, viszont ehhez 1-et hozzáadunk, ha az osztás elvégzése után a nyelv jobbra áll ki.

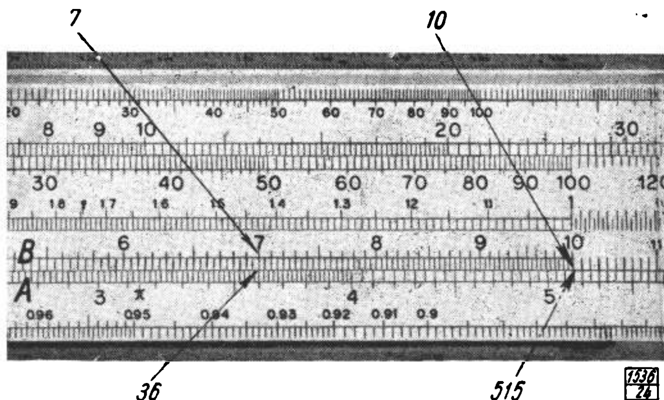
Összefoglalva:

Szorzás esetén az 1, illetve 10 lécvégeket használjuk a beállításhoz. Osztásnál az eredményt az 1, illetve 10 skálavégeken olvassuk le.

Példa: $\frac{27}{3} = 9.$

A művelet elvégzése a lécen a következő :

Az osztandót, 27-et megkeressük az *A* skálán. E jel fölé helyezzük a nyelv *B* skálájának 3-as jelét. Megálla-



24. ábra

pítjuk, hogy a léc balra állt ki. A nyelv *B* skálájának 10-es jelénél olvassuk le az eredményt : 9-et.

A számjegyek száma ebben az esetben :

$$2 - 1 = 1.$$

Most néhány olyan példát mutatunk, amelyben tizedesszám is szerepel.

A lécen e műveletet a következőképpen végezzük el: Beállítjuk az *A* skálán a 36-ot. Megkeressük a *B* skálán a 7-et és azt a 36 fölé helyezzük. A nyelv 10-es jelénél leolvassuk az eredményt: 515-öt (24. ábra).

Állapítsuk meg a számjegyek számát:

$$-3 - 1 = -4,$$

tehát a tizedesvessző utáni zérusok száma: 4.

Példa: $\frac{26}{0{,}000036} = 723\,000.$

Az *A* skálán beállítjuk a 26-ot. A *B* skálán megkeressük a 36-os jelet, amelyet a 26-os jel fölé helyezünk és a *B* skála 10-es jelénél leolvassuk az eredményt: 723-at.

A számjegyek számát az eddigiek alapján a következőképpen állapítjuk meg:

$$2 - (-4) = 6,$$

tehát a számjegyek száma 6.

Mint e példákból is látható, az osztás a lécen hosszak leolvasásává alakult át. A számjegyek számát úgy állapítjuk meg, hogy az osztandó számjegyszámából levonjuk az osztó számjegyszámát. Ha e művelet alatt a nyelv jobbra állt ki, akkor ehhez az eredményhez 1-et hozzáadunk.

A szorzás és osztás között tehát a számjegyek megállapítása szempontjából még az a különbség, hogy

a szorzásnál annyiszor 1-et vonunk le,

az osztásnál annyiszor 1-et adunk hozzá

a számjegyszám összegéhez, illetve különbségéhez, ahányszor a nyelv jobbra állt ki.

Példa: $\frac{385}{0,6} = 641,6.$

Az *A* skálán beállítjuk a 385-öt és e fölé helyezzük a nyelv *B* skálájának 6-osát; a *B* skála 10-énél leolvassuk az eredményt: 6416-ot. A számjegyek száma:

$3 - 0 = 3$ (a nyelv balra áll ki, tehát a számjegyek száma meg is marad 3).

Példa: $\frac{0,005}{37} = 0,000135.$

Az *A* skálán beállítjuk az 5-öt. A nyelv *B* skálájának 37-es jelét fölé helyezzük. A *B* skála 1-es jelénél leolvassuk az eredményt. A nyelv jobbra áll ki.

Állapítsuk meg a számjegyek számát az ismert módon:

$$-2 - 2 + 1 = -4 + 1 = -3,$$

tehát a tizedesvessző utáni zérusok száma: 3.

Példa: $\frac{2683}{196} = 13,7.$

Az *A* skálán beállítjuk a 2683-at. E szám utolsó számjegyét a skálán becsléssel állapítjuk meg. Megkeressük a nyelv *B* skáláján a 196-ot, amelyet az *A* skála kijelölt helyére helyezzük. A nyelv *B* skálája 1-énél leolvassuk az eredményt: 137-et. A nyelv e műveletnél jobbra állt ki.

A számjegyek száma:

$$4 - 3 + 1 = 5 - 3 = 2,$$

tehát az egészszámjegyek száma: 2.

Gyakorlatok az osztáshoz

Példa: $\frac{625}{25} = 25.$

A számjegyek száma: $3 - 2 + 1 = 4 - 2 = 2.$

Példa: $\frac{1440}{12} = 120.$

A számjegyek száma: $4 - 2 + 1 = 5 - 2 = 3.$

Példa: $\frac{3200}{45} = 71,4.$

A számjegyek száma: $4 - 2 = 2.$

Példa: $\frac{18}{0,027} = 666.$

A számjegyek száma: $2 - (-1) = 2 + 1 = 3.$

Példa: $\frac{0,0000127}{0,01555} = 0,000817$

A számjegyek száma: $-4 - (-1) = -4 + 1 = -3.$

Példa: $\frac{0,0125}{0,00019} = 66.$

A számjegyek száma: $-1 - (-3) = -1 + 3 = 2.$

Példa: $\frac{0,00885}{0,000012} = 738.$

A számjegyek száma: $-2 - (-4) + 1 = 5 - 2 = 3.$

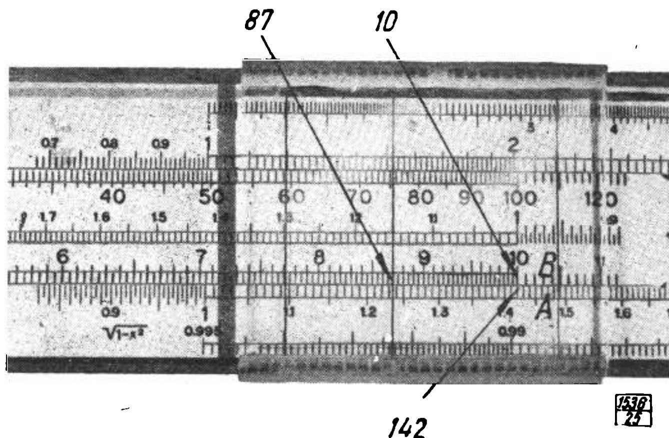
C) Szorzás és osztás együttes művelete

A szorzás és osztás eddig ismertetett léckezelését olyan példákon mutatjuk be, amelyekben mind a két művelet előfordul. Így az eddigi léckezelési utasítások előnyei fokozottan érvényesülnek.

Példa: $\frac{142 \cdot 87}{12} = 1028.$

Először elvégezzük a szorzást:

Az *A* skálán beállítjuk a 142-t. Ide helyezzük a nyelv skálájának 10-esét és megkeressük a nyelv *B* skáláján a 87-et. Ide helyezzük a futó karcjelét. A nyelv balra állt ki. A karcjelhez helyezzük a *B* skála 12-es jelét és a nyelv 1-es jelénél leolvassuk az eredményt: 1028-at.



25. ábra

Állapítsuk meg a számjegyek számát:

$$3 + 2 - 2 + 1 = 4,$$

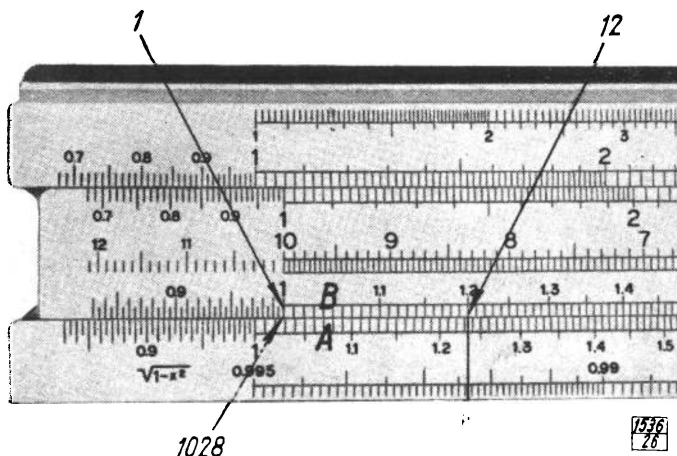
tehát a számjegyek száma: 4. (A nyelv az osztásnál jobbra állt ki.) (25. és 26. ábra.)

Példa: $\frac{35 \cdot 18}{27} = 23{,}3.$

Mint az előző példában láttuk, először elvégezzük a szorzást és azután az osztást. A közbenső eredmény nem

érdekel bennünket, csak a nyelv jobbra-állását kell figyelembe venni. Kövessük tehát e példa léckezelését.

Megkeressük az *A* skálán a 35-öt. Ide helyezzük a nyelv *B* skálájának 1-esét. Ugyane skála 18-asához állítjuk a futó karcjelét. A nyelv jobbra állt ki. A karc-



26. ábra

jelhez helyezzük a *B* skála 27-ét és leolvassuk az eredményt a *B* skála 1-énél : 233. Az osztáskor is jobbra állt ki a nyelv.

A számjegyek száma :

$$2 + 2 - 2 - 1 + 1 = 5 - 3 = 2,$$

tehát a számjegyek száma : 2.

$$\textit{Példa:}\ \frac{626 \cdot 0{,}0037}{125 \cdot 0{,}7} = 0{,}0268.$$

Először elvégezzük a szorzást. Ezt követőleg osztunk 125-tel és az eredményt elosztjuk 7-tel.

A számjegyek száma:

$$3-2-3-0+1=4-5=-1,$$

tehát a tizedesvessző utáni zérusok száma: 1.

Példa: $\frac{318 \cdot 622 \cdot 0{,}000037}{47 \cdot 0{,}006} = 26.$

Elvégezzük sorban egymásután a szorzást, az eredményt osztjuk 47-tel, majd 6-tal. Mind a szorzás, mind az osztás után a nyelv egyszer jobbra állt ki, s így a számjegyek száma:

$$3+3-4-2-(-2)-1+1=9-7=2,$$

tehát a számjegyek száma: 2.

Példa: $\frac{364}{0{,}000632 \cdot 0{,}0028} = 205\,000\,000$

Ismétlésként ismertetjük e példa léckezelését:

Az *A* skálán beállítjuk a 364-et a futó karcjelével. Ide helyezzük a nyelv *B* skálájának 632. jelét. A nyelv 10-es jeléhez helyezzük a futót. Ide helyezzük a *B* skála 28 jelét és a nyelv 1-es jelénél leolvassuk az eredményt: 205-öt.

Állapítsuk meg a számjegyek számát:

$$3-(-3)-(-2)+1=9,$$

tehát a számjegyek száma 9, figyelembe véve, hogy az osztásnál a nyelv egyszer áll ki jobbra.

Példa: $\frac{0{,}000152 \cdot 0{,}085 \cdot 0{,}00352}{0{,}000017 \cdot 0{,}00482} = 0{,}557.$

Elvégezzük egymásután a szorzást és ezt követőleg osztunk 17-tel, majd 482-vel.

Állapítsuk meg a számjegyek számát :

$$-3-1-2-(-4)-(-2)-1+1=7-7=0,$$

tehát a tizedesvessző utáni zérusok száma 0, figyelembe véve, hogy mind az osztás, mind a szorzás után a nyelv egyszer állt ki jobbra.

Példa : $\dfrac{14{,}5\cdot 61\cdot 0{,}0316}{0{,}0097\cdot 65}=44{,}5.$

Hangsúlyozzuk, hogy a számolásnál nem törődünk a tizedesvesszővel, csak azt számoljuk, hogy az osztásnál, illetve a szorzásnál a nyelv hányszor áll ki jobbra.

Példa : $\dfrac{47\cdot 0{,}00185\cdot 1265}{0{,}018\cdot 612\cdot 97}=0{,}102.$

E példában tehát a szorzás műveletének elvégzése után háromszor egymásután osztunk. E művelet alatt a nyelv egyszer állt ki jobbra, éspedig mind a szorzásnál, mind az osztásnál.

A számjegyek száma :

$$2-2+4-(-1)-3-2-1+1=8-8=0,$$

tehát a tizedesvessző után nincs 0.

Példa : $\dfrac{25\cdot 63}{0{,}000000125\cdot 0{,}0087\cdot 1562}=925\,000\,000.$

A számjegyek száma :

$$2+2-(-6)-(-2)-4+1=13-4=9,$$

tehát a számjegyek száma : 9.

(Osztáskor a nyelv egyszer állt ki jobbra).

Példa: $$\frac{26827 \cdot 0{,}000000825 \cdot 365{,}45 \cdot 0{,}7}{289{,}5 \cdot 368 \cdot 0{,}0025} = 0{,}0212.$$

A számjegyek száma:

$$5 - 6 + 3 + 0 - 3 - 3 - (-2) - 1 + 2 = 12 - 13 = -1,$$

tehát a tizedesvessző utáni zérusok száma: 1, figyelembe véve, hogy a léc a szorzásnál egyszer, az osztásnál kétszer állt ki jobbra.

Példa: $$\frac{642{,}5 \cdot 0{,}0125 \cdot 68{,}5 \cdot 92 \cdot 0{,}0017}{0{,}0085 \cdot 0{,}037 \cdot 197{,}5 \cdot 42} = 33{,}8.$$

A számjegyek száma:

$$3 - 1 + 2 + 2 - 2 - (-2) - (-1) - 3 - 2 - 2 + \\ + 2 = 12 - 10 = 2.$$

Tekintettel arra, hogy a nyelv mind az osztás, mind a szorzás alkalmával kétszer állt ki jobbra, az egészszámjegyek száma: 2.

Figyelemreméltó az utóbbi példákban az, hogy vegyesszámok esetén, amikor a szám egész- és tizedesszámból áll, a számjegyek megállapításánál csak az egészszámjegyek szerepelnek.

Példa:

$$\frac{615 \cdot 0{,}000955 \cdot 527{,}5 \cdot 195{,}6 \cdot 2562 \cdot 17{,}5}{427 \cdot 0{,}0017 \cdot 697 \cdot 485 \cdot 827} = 13{,}5.$$

Befejezésül részletesen ismertetjük e példa léckezelését.

A szorzással kezdjük:

A skála 615 jeléhez helyezzük a *B* skála 10-es jelét.

B skála 955 jeléhez helyezzük a futó karcjelét, ahol az rögzítve marad. Ide helyezzük a *B* skála 10-es jelét.

B skálán megkeressük az 5275 jelet és idehelyezzük a *B* skála 1-esét.

B skálán megkeressük az 1956 jelet és a karcjel segítségével ide helyezzük a *B* skála 10-es jelét.

B skálán megkeressük a 2562 jelet és ide helyezzük a *B* skála 1-es jelét.

B skálán megkeressük a 175 jelet és ide helyezzük a futó karcjelét, ahol az rögzítve marad.

Ezzel a szorzás műveletét befejeztük és áttérünk az osztásra. Természetesen a közbenső eredményeket sem most, sem később nem olvassuk le.

A futó legutolsó karcjeléhez állítjuk a nyelv *B* skáláján a 427-et. A futó karcjelét a nyelv 10-eséhez helyezzük.

E karcjelhez toljuk a *B* skála 17-esét. A futót eltoljuk a nyelv 1-es helyére.

E karcjelhez helyezzük a nyelv *B* skála 697 jelét és a nyelv 10-es jeléhez állítjuk a karcjelet.

E karcjelhez helyezzük a *B* skála 485 jelét és a *B* skála 1-es jeléhez állítjuk a futót a karcjellel.

E karcjelhez helyezzük a nyelv *B* skálájának 827 jelét és a *B* skála 10-es jelénél leolvassuk az eredményt.

A számjegyek száma:

$$3 - 3 + 3 + 3 + 4 + 2 - 3 - (-2) - 3 - 3 - 3 - 2 + \\ + 2 = 19 - 17 = 2.$$

A számjegyek száma tehát: 2, figyelembe véve, hogy e számolás alatt mind az osztásnál, mind a szorzásnál a nyelv kétszer állt ki jobbra.

Ilyen hosszabb számításoknál érvényesülnek azoknak a szabályoknak előnyei, amelyeket a léckezeléshez elő-

írtunk. A számításokat tehát a tizedesvesszőtől függetlenül végezzük el. Közbenső értékeket nem olvasunk le, csak arra kell ügyelnünk, hogy a szorzásnál, illetve az osztásnál a nyelv hányszor áll ki jobbra.

Ezzel a példasorozattal a léccel való szorzás és osztás módszerét ismertettük és most táblázatba foglaljuk a számjegyszámok megállapításának szabályait:

I. táblázat

A szorzás és osztás számjegyszámainak megállapítása

	Egész- vagy vegyesszám esetében	
szorzásnál a szorzat számjegyeinek száma egyenlő	a szorzó és szorzandó egészszámjegyeinek összegével,	ha azonban a nyelv jobbra áll ki, akkor ebből 1-et levonunk.
osztásnál a hányados számjegyeinek száma egyenlő	az osztandó és osztó egészszámjegyeinek különbségével,	ha azonban a nyelv jobbra áll ki, akkor ehhez még 1-et hozzáadunk.
	Tiszta tizedesszám esetében	
szorzásnál a szorzat tizedesvessző utáni zérusainak száma egyenlő	a szorzandó és szorzó tizedesvessző utáni zérusai számának összege negatív előjellel,	ha azonban a nyelv jobbra áll ki, akkor ebből 1-et levonunk;
osztásnál a hányados tizedesvessző utáni zérusainak száma egyenlő	az osztandó és osztó tizedesvessző utáni zérusai számának különbsége negatív előjellel,	ha azonban a nyelv jobbra áll ki, akkor ehhez 1-et hozzáadunk.

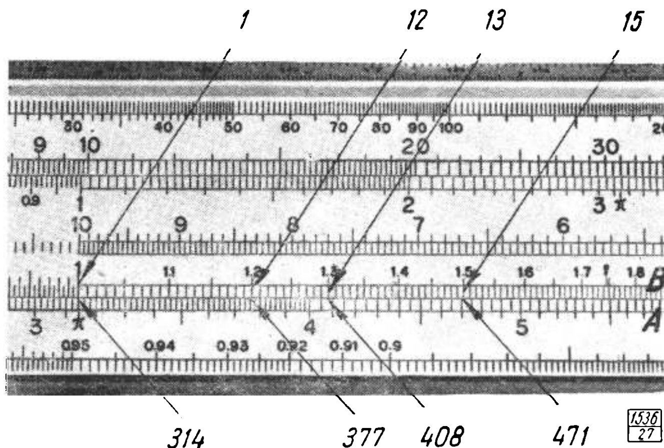
D) Szorzás és osztás állandó számmal

Ha több számot ugyanazzal a számmal kell szorozni vagy osztani, a léckezelést le lehet egyszerűsíteni. Legegyszerűbb példa erre a kör kerületének kiszámítása, amelyet úgy kapunk, hogy a kör átmérőjét megszorozzuk a Ludolf-féle számmal. A léceken a Ludolf-féle számot a

szokásos módon, a görög π betűvel jelölik. Így könnyebben lehet a skálán megkeresni, és ez meggyorsítja a vele való számolást.

Példa: 120, 130, 150, 300, 350, 700 mm átmérőjű kör kerületét számítsuk ki.

Az *A* skálán beállítjuk a π-t. Ide helyezzük a nyelv *B* skálájának 1-esét. A futó karcjelét a *B* skála 12 jele



27. ábra

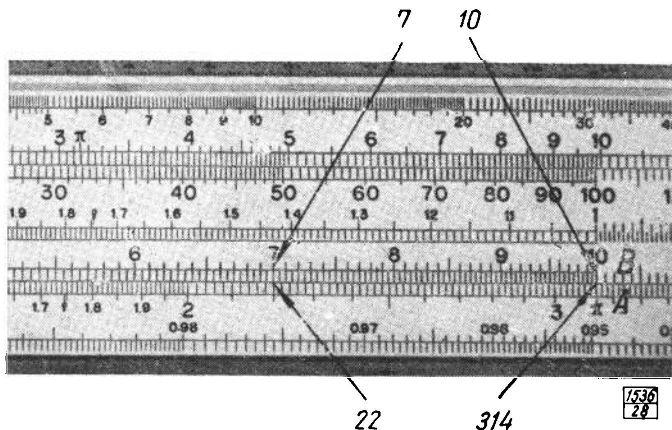
fölé helyezzük és az *A* skálán leolvassuk az eredményt: 377-et. A *B* skála 13-ánál 408-at, a 15 jelnél 471-et olvasunk le. E művelet alatt a nyelv a helyén maradt (27. ábra).

A *B* skála 3-as jelénél leolvassuk a kör kerületét: 942 mm-t.

A további példákat csak úgy számolhatjuk ki, ha a *B* skála 10-ét helyezzük a π-hez. Így a *B* skála 7 jelénél leolvasunk: 2200-at (28. ábra).

Ugyancsak egyszerűsíthetjük a léckezelést, ha több számot kell ugyanazzal a számmal osztani. Példaképpen számoljuk ki a kör kerületéből a kör átmérőjét.

Példa: Számítsuk ki a kör átmérőjét, ha kerülete 328, 693, 728, illetve 1325 mm.



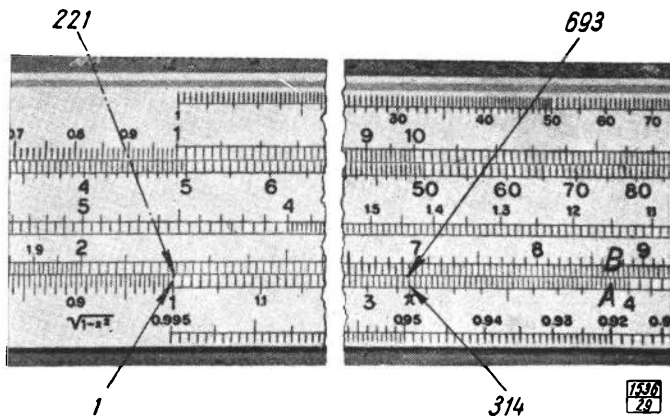
28. ábra

Az *A* skálán megkeressük a π-t. Ide helyezzük a futó karcjelét, és az a további műveletek alatt állandóan ott marad. A *B* skála 328 jelét a π-hez helyezzük — és most jól ügyeljünk — az *A* skála 1-es jelénél olvasunk le. Az eredmény: 104,2 mm. Ezt követőleg ugyanerre a helyre helyezzük a 728-at és az *A* skála 1-énél leolvassuk. az eredményt: 232 mm-t.

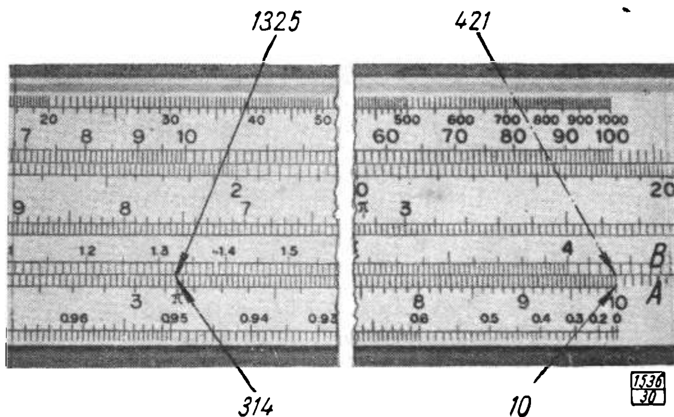
Ha a kör kerülete 693 mm, akkor ismét a *B* skálán olvasunk le, és a leolvasáshoz az *A* skála 1-esét használjuk. Az eredmény: 221 mm (29. ábra).

A következő példánál, amikor a kör kerülete 1325 mm és keressük a hozzá tartozó kör átmérőjét, az *A* skála

10-énél olvassuk le az eredményt : 421 mm átmérőt (természetesen a *B* skálán) (30. ábra).



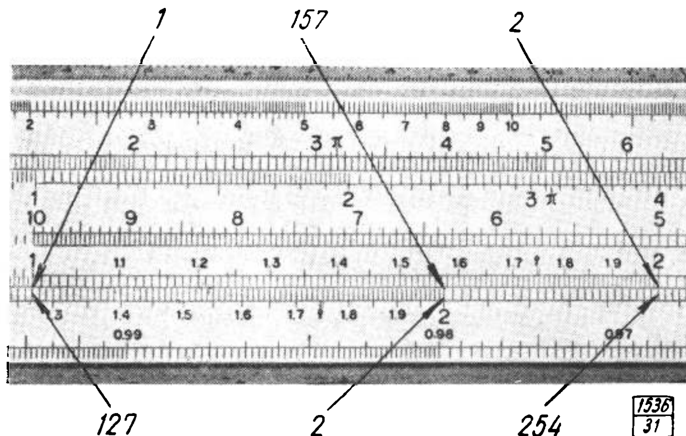
29. ábra



30. ábra

Példa: 0,5″ = 1/2″, 0,75″ = 3/4″, 1,25″ = 1 1/4″, 1,5″ = 1 1/2″ angol méreteket számítsuk át mm-re.

Mint ismeretes, 1″ = 25,4 mm. Ezt a jelet megkeressük az *A* skálán, szükség szerint a *B* skála 1-es vagy 10-es jelét fölé helyezzük és sorban leolvassuk a fenti számok alatt a következő számokat: 127, 191, 318, 382. A tizedesvesszőt utólag állapítjuk meg. Így a végeredmény: 12,7, 19,1, 31,8 és 38,2.



31. ábra

Példa: 1,27-ot, mint két szám viszonyát kívánjuk előállítani.

E célból az *A* skálán a 127 jelhez helyezzük a nyelv *B* skálájának 1-esét és akkor többek között a következő viszonyszámokat olvashatjuk le:

$$1{,}27 = \frac{2}{1{,}57} = \frac{2{,}54}{2}.$$

Mint látható, az eredményeket egy beállítással olvashatjuk le (31. ábra).

E fejezetben ismertetett számítások gyakorlására ajánljuk az 87. oldalon lévő táblázat adatainak ellenőrző számítását.

E) Szorzás és osztás reciprok skálával

Reciprok érték és skála. Valamely szám reciprok értékét úgy számítjuk ki, hogy a számot olyan tört nevezőjének írjuk, amelynek számlálója : 1.

Példa : Számítsuk ki 5-nek a reciprok értékét.

Felállítjuk a következő törtet :

$$\frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Tetszőleges a szám reciprok értéke tehát $\frac{1}{a}$, a szám és reciprok értékének szorzata 1.

Ebből azonnal következik, hogy a reciprok skála szerkezetileg egyezik az *A* skálával, azonban fekvése ellenkező, mert ahol pl. az *A* skálán az 5 jelet látjuk, azzal egyirányban a reciprok skálán a 2 jelnek kell lennie. A reciprok skálát az 5. ábrán *E*-vel jelöltük. Rendesen a nyelv közepén helyezik el, sok esetben piros színezéssel.

Példa: Állapítsuk meg a lécen 6,5-nek a reciprok értékét.

Az *A* skálán megkeressük a 65-öt. Ide helyezzük a futó karcjelét és a reciprok skálán leolvassuk az eredményt : 0,153-et. E célból az *A* és *B* skála kezdő jeleinek egybe kell esniök. Egyszerű reciprokszámításokhoz használhatjuk magát a *B* skálát is.

Ha ezt a számítást a reciprok skála nélkül kellene elvégezni, akkor — mint ismeretes — az *A* skála 1-es jele fölé kell a nyelv *B* skálájának 65-ösét helyezni és a *B*

skála 10-es jelénél az eredményt leolvasni. Ezzel szemben a reciprok skála minden nyelvmozgatás nélkül megadja a szám reciprok értékét.

A reciprok skálának még megvan az az előnye, hogy minden osztást a sokkal egyszerűbb szorzásra lehet visszavezetni, amit példán mutatunk be.

Példa: Számítsuk ki reciprok skálával $\frac{12}{6}$-ot.

Írjuk fel e kifejezést a következő alakban:

$$\frac{12}{6} = 12 \cdot \frac{1}{6},$$

tehát az osztás helyett szorzást kell végezni, mert 12-t szorozni kell a 6 reciprok értékével. Tehát e művelethez az *A* és a reciprok skálát fogjuk használni.

A számítás menete a következő:

Az *A* skálán megkeressük a 12-t. Ide helyezzük a reciprok skála 10-esét és a reciprok skála 6-osánál a karcjel segítségével leolvassuk az eredményt: 2-t (32. ábra).

Példa: $\frac{41}{2} = 20{,}5.$

A számítás menete a következő:

Az *A* skálán megkeressük a 41-et. E fölé helyezzük a reciprok skála 1-esét és a reciprok skála 2-ese alatt leolvassuk az eredményt: 20,5-et. A nyelv balra állt ki. A számjegyek száma:

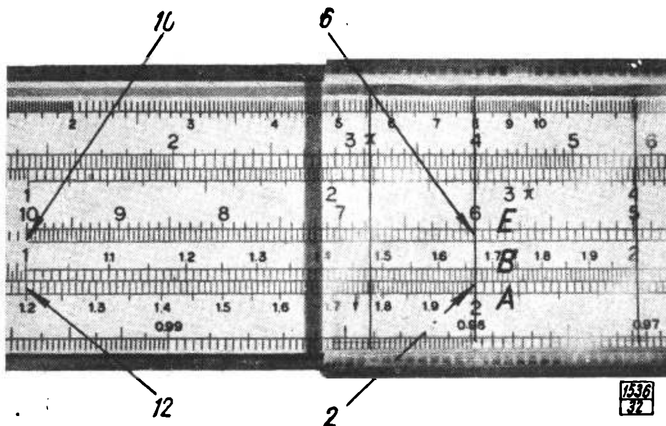
$$2 - 1 + 1 = 3 - 1 = 2,$$

ebben az esetben, amikor a nyelv balra állt ki, a számjegyekhez 1-et hozzá kellett adni.

Példa: $\frac{415}{6250} = 0{,}0665.$

A számítás menete a következő:

Az *A* skálán megkeressük a 415-öt. E jelhez helyezzük a reciprok skála 10-esét és a reciprok skála 6250 jelénél



32. ábra

leolvassuk az eredményt: 665-öt. A nyelv jobbra állt ki. A számjegyek száma:

$$3 - 4 = -1,$$

tehát a tizedesvessző utáni 0-ok száma 1.

Áttérünk a reciprok skálával való szorzás műveletére.

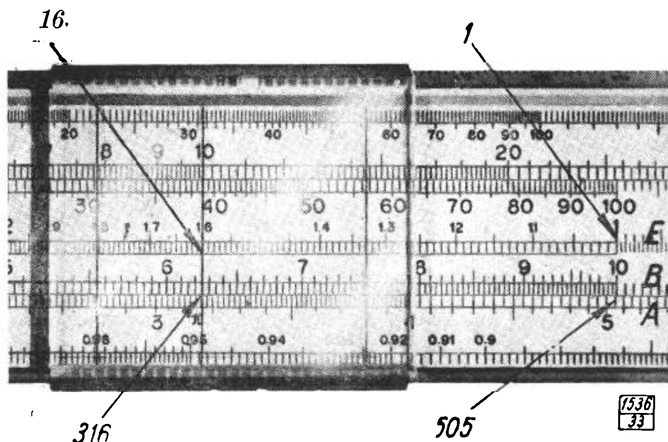
Példa: $0{,}00316 \cdot 16 = 0{,}0505.$

16-tal szorozni annyi, mint 1/16-dal osztani.

A számítás menete a következő:

Az A skálán megkeressük a 316-ot. Fölé helyezzük a reciprok E skála 16-osát és a reciprok skála 1-énél leolvassuk az eredményt : 505-öt. A nyelv balra állt ki. A számjegyek száma :

$$-2 + 2 - 1 = -1,$$



33. ábra

tehát a tizedesvessző utáni 0-ok száma 1 (33. ábra).

Példa : $\dfrac{0{,}00256 \cdot 0{,}0032}{21} = 0{,}00000039$

A számítás menete a következő :

Megkeressük az A skálán a 256-ot. Fölé helyezzük a reciprok skála 32-esét. A nyelv balra állt ki. Megkeressük a reciprok skálán a 21-et és a futó segítségével leolvassuk az A skálán az eredményt : 39-et. Mind a szorzásnál, mind az osztásnál a nyelv balra állt ki.

A számjegyek száma :

$$-2-2-2-1+1=-7+1=-6,$$

tehát a tizedesvessző utáni 0-ok száma 6.

Példa: $\frac{0{,}00525}{16 \cdot 0{,}7} = 0{,}000468$

A számítás menete a lécen a következő :

Az *A* skálán megkeressük az 525-öt. Fölé helyezzük a reciprok skála 1-esét és e skálán megkeressük a 16-ot. Ide helyezzük a reciprok skála 10-esét és 7-nél leolvassuk az eredményt : 468-at az *A* skálán. A számjegyek száma :

$$-2-2-0+1=-4+1=-3,$$

tehát a tizedesvessző utáni 0-ok száma 3, figyelembe véve, hogy az egyik osztásnál a nyelv balra állt ki.

Példa: $\frac{22 \cdot 0{,}37}{0{,}082 \cdot 65} = 1{,}54.$

A számítás menete a lécen a következő :

Az *A* skálán megkeressük a 22-t. A reciprok *E* skála 37 jelét fölé helyezzük. Az eredménynél fekszik az *E* skála 10-ese. Megkeressük az *E* skálán a 82-t. Ide helyezzük az *E* skála 10-esét és az *E* skála 65 jelénél leolvassuk az eredményt.

Az osztásnál a nyelv balra állt ki. A számjegyek száma:

$$2+0-(-1)-2-1+1=1,$$

tehát a számjegyek száma : 1.

Ha az eddigi számításokat a reciprok skálával áttekintjük, azt találjuk, hogy szorzás és osztás esetén a léckezelés menete ellenkezője annak, amit az *A* és *B* skálánál láttunk :

Ha reciprok skálával osztunk, akkor a reciprok skála 1-esét vagy 10-esét helyezzük az *A* skálán kijelölt szám fölé.

Ha reciprok skálával szorzunk, akkor az *A* skálán kijelölt szám fölé a szorzat másik tényezőjét helyezzük.

A számjegyek számánál a reciprok skála használatakor a léc balra állását vesszük figyelembe és a szorzásnál egyet levonunk, osztásnál egyet hozzáadunk.

Mindezek ellenkezői annak, amit az *A* és *B* skála használatakor láttunk, amikor velük ugyanezeket a műveleteket végeztük el.

Gyakorlatképpen számoljuk át az 87. oldalon lévő táblázat adatait.

F) Négyzetreemelés és négyzetgyökvonás

A négyzetreemelés és négyzetgyökvonás a hatványozás egyik különleges esete. Négyzetreemelésnél a hatvány kitevője 2, négyzetgyökvonásnál pedig ½. A hatvány logaritmusát — mint azt a 11. oldalon láttuk — úgy számítjuk ki, hogy az alap logaritmusát szorozzuk a kitevővel, esetünkben 2-vel, illetve ½-del. Ebből azonnal következik, hogy a lécen a négyzetreemeléshez s a gyökvonáshoz két olyan skálára van szükség, amelyeknél az egyik skála egysége fele a másik egységének.

E célra szolgál a lécen az *A* és *D* skála. A *D* skála két részből, éspedig D_1 és D_2-ből áll (5. ábra).

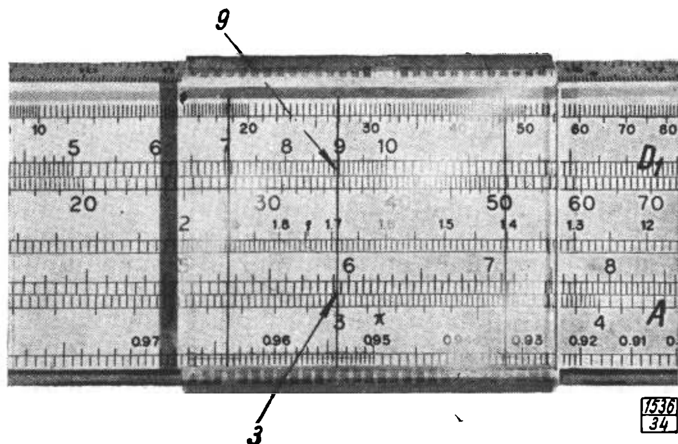
Először a négyzetreemeléssel foglalkozunk, és előre várhatjuk, hogy a számjegyek száma megkétszereződik. Ez a szabály azonban — mint azt a későbbiekben látni fogjuk — némileg módosul, amire már most felhívjuk a figyelmet.

A következőkben a négyzetreemelést néhány példán mutatjuk be.

Példa: $3^2 = 9$ léckezelését ismertetjük.

Az *A* skálán megkeressük a 3-at és az ide helyezett karcjel kijelöli a D_1 skálán az eredményt: 9-et.

A számjegyekre nézve megállapítjuk, hogy az alap számjegyeinek száma: 1. A négyzetreemelés következtében



34. ábra

ezt meg kell szorozni 2-vel, és mert az eredményt a D_1 skálán olvassuk le, 1-et le kell vonni. Ezek alapján a számjegyek száma:

$$2 \cdot 1 - 1 = 1,$$

tehát a számjegyek száma 1 (34. ábra).

Példa: $6^2 = 36$.

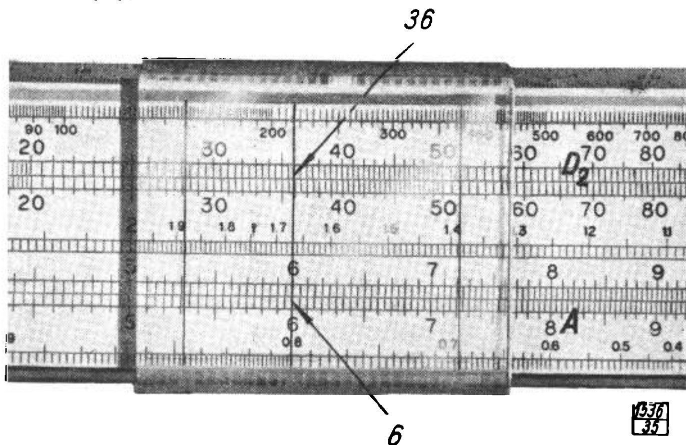
Az *A* skálán megkeressük a 6-ot. A karcjel segítségével megkeressük a D_2 skálán az eredményt: 36-ot.

A számjegyekre nézve megállapítjuk, hogy az alap számjegyeinek számát meg kell szorozni 2-vel, és mert az

eredményt a D_2 skálán olvassuk le, a számjegyek száma változatlan marad. Tehát

$$2 \cdot 1 = 2,$$

a számjegyek száma 2 (35. ábra).



35. ábra

Ha azt a határt akarjuk megállapítani, amelynél a D_1, illetve a D_2 skálát kell a négyzetreemelésnél használni, akkor a következő egyenletet kell megoldani:

$$x^2 = 10,$$

azaz

$2 \cdot \lg x = 1$ és $\lg x = 0{,}5$, és visszakeresve: $x = 3{,}16$. Ebből következik, hogy ha 3,16 vagy akár 0,0316 stb.-nél nagyobb számot kell négyzetreemelni, akkor a D_2, ellenesetben a D_1 skálát kell használni.

Példa: $20^2 = 400$.

Az A skálán megkeressük a 2-t, és a futó segítségével a D_1 skálán leolvassuk az eredményt: 4-et.

A számjegyek száma, tekintettel arra, hogy a D_1 skálán olvastuk le az eredményt:

$$2 \cdot 2 - 1 = 3,$$

a számjegyek száma tehát 3.

Példa: $60^2 = 3600$.

Az *A* skálán megkeressük a 6-ot és a futó karcjele segítségével leolvassuk az eredményt: 36-ot. Azt eredmény a D_2 skálán jelentkezik, tehát a számjegyek száma:

$$2 \cdot 2 = 4.$$

Példa: $3,26^2 = 10,6$.

Az *A* skálán megkeressük a 326-ot és a D_2 skálán leolvasunk 106-ot.

A számjegyek száma: $2 \cdot 1 = 2$.

Ilyen vegyesszám esetén a számjegyeket csak az egészszám számjegyei alapján kell megállapítani.

Példa: $153^2 = 23\,500$.

Az *A* skálán megkeressük a 153-at és a futó segítségével a D_1 skálán olvassuk le az eredményt. A számjegyek száma:

$$2 \cdot 3 - 1 = 5.$$

Példa: $625^2 = 391\,000$.

Az *A* skálán megkeressük a 625-öt és a futó segítségével leolvassuk a D_2 skálán a 391-et.

A számjegyek száma: $2 \cdot 3 = 6$.

Példa: $1428^2 = 2\,040\,000$.

Az *A* skálán megkeressük becsléssel az 1428 jelét és a futó segítségével a D_1 skálán leolvassuk az eredményt: 204-et. A számjegyek száma, figyelembe véve, hogy a D_1 skálát használtuk:

Áttérünk *tizedesszámok négyzetreemelésének* ismertetésére. Tizedesszámok esetén a tizedesvessző utáni zérusok számát kell figyelembe venni, negatív előjellel.

Példa: $0{,}2^2 = 0{,}04$.

Az *A* skálán megkeressük a 2-t. A futó segítségével a D_1 skálán leolvassuk az eredményt : 4-et.

A számjegyek száma, figyelembe véve, hogy az D_1 skálát használtuk, az eredmény leolvasásánál :

$$2 \cdot 0 - 1 = -1.$$

A tizedesvessző utáni zérusok száma : 1.

Példa: $0{,}006^2 = 0{,}000036$.

Az *A* skálán megkeressük a 6-ot és a D_2 skálán olvassuk le az eredményt.

A számjegyek száma : $2(-2) = -4$.

Példa: $0{,}000225^2 = 0{,}0000000505$.

Az *A* skálán megkeressük a 225-öt. A futó segélyével az eredményt a D_1 skálán olvassuk le : 505-öt.

A számjegyek száma :

$$2(-3) - 1 = -7,$$

tehát a tizedesvessző utáni 0-ok száma 7.

Ezek után áttérünk a *négyzetgyökvonás* léckezelesére.

Négyzetreemeléskor az *A* skálából indultunk ki és valamelyik *D* skálán olvastuk le az eredményt.

A négyzetgyökvonásnál fordítva járunk el, éspedig a számot valamelyik *D skálán állítjuk be, és az eredményt az A skálán olvassuk le.*

A *D* skála 2 részből, éspedig a D_1 és D_2 skálából áll. Első feladatunk annak a megállapítása, hogy mikor kell a D_1 és mikor a D_2 skálát használni.

A számjegyszám megállapításakor általában a gyök alatti szám számjegyszáma felét kellene venni, azonban ez nem minden esetben áll fenn. Az eltérést a következőkben bemutatott példákon ismertetjük.

Példa: $\sqrt{2} = 1{,}414.$

A D_1 skálán megkeressük a 2-t és a futó segítségével leolvassuk az A skálán az eredményt: 1,414-et.

A számjegyszámot a következő szabály szerint állapítjuk meg a D_1 skála használata esetén:

$$\frac{n+1}{2},$$

ahol n a számjegyek száma. Négyzetreemeléskor a D_1 skála használata esetén a számjegyek számából egyet le kellett venni. A négyzetgyökvonásnál, mint megfordított műveletnél, 1-et hozzá kell adni. A négyzetreemelésnél 2-vel szorozni kellett, a négyzetgyökvonásnál pedig 2-vel osztunk.

Ha a D_2 skálát használjuk, akkor a számjegyek száma:

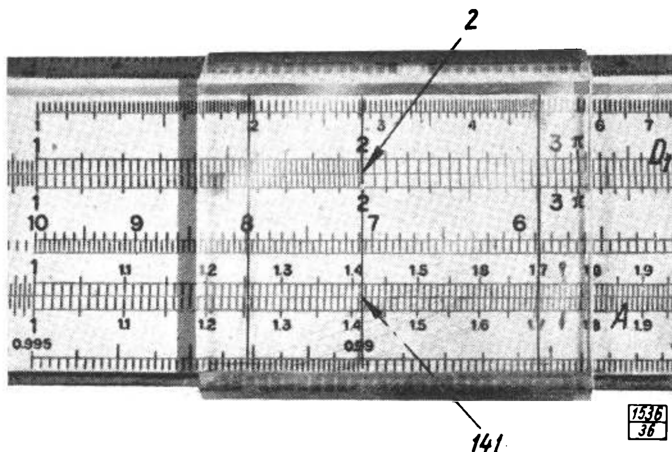
$$\frac{n}{2}.$$

Az előbbi példával kapcsolatban csak a D_1 skálát használhatjuk, mert ez esetben a számjegyek száma $\frac{1+1}{2} = 1.$

A D_2 skálát azért sem lehet példában használni, mert e skálára vonatkozó szabály szerint a számjegyek száma ½ volna, ami lehetetlen (36. ábra).

Példa: $\sqrt{20} = 4{,}48.$

A számjegyek száma 2. Ha a D_1 skálát akarnók használni, akkor az eredmény számjegyeinek száma $\frac{2+1}{2}$



36. ábra

lenne, ami lehetetlen. Tehát a D_2 skálát kell használni (37. ábra).

A D_2 skálán megkeressük a 20-at és az A skálán leolvassuk az eredményt, 448-at.

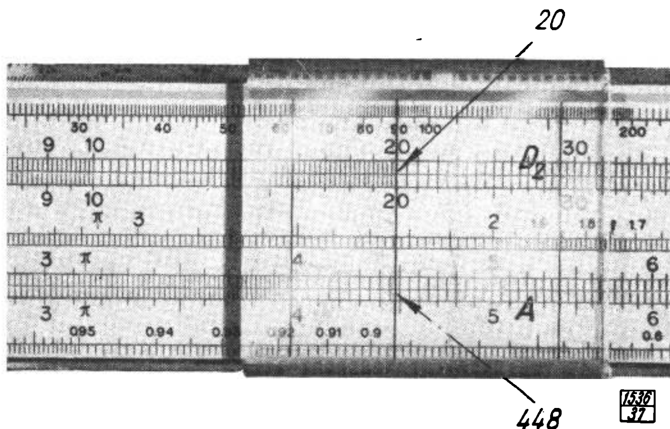
A számjegyek száma : $\frac{2}{2} = 1$, tehát a számjegyek száma : 1.

Példa: $\sqrt{3\,60} = 19.$

A D_1 skálát kell használni, amelyről az előzőkben ismertetett próba győzhet meg. Beállítjuk a 36-ot és az A skálán leolvassuk az eredményt : 19-et,

A számjegyek száma :

$$\frac{3+1}{2} = 2.$$



37. ábra

Példa : $\sqrt{36\ 00} = 60.$

Ha ez esetben a gyök alatti számokat számpárokra osztjuk, akkor nem marad fenn semmi. Az előbbiek szerint tehát a D_2 skálát kell használni. Így a számjegyek száma :

$$\frac{4}{2} = 2.$$

Példa : $\sqrt{3\ 12\ 76} = 177$ léckezelését ismertetjük.

Ha a gyök alatti szám számjegyeit számpárokra osztjuk fel, akkor egy marad fenn. Ez annak a jele, hogy a D_1 skálát kell használni,

A D_1 skálán megkeressük becsléssel a 31276-ot, és az *A* skálán leolvassuk az eredményt: 177-et.

A számjegyek számát akként állapítjuk meg, hogy a gyök alatti számjegyek számához 1-et hozzáadunk, s az eredményt 2-vel osztjuk.

Tehát:

$$\frac{5+1}{2}=3.$$

Példa:

$$\sqrt{25\ 64\ 89}=507.$$

Ha a gyök alatti számjegyeket számpárokra osztjuk, akkor nem marad fenn semmi. Ezért a D_2 skálát kell használni.

A D_2 skálán becsléssel megkeressük a gyök alatti számot és az *A* skálán a futó segítségével leolvassuk az eredményt.

A számjegyek száma: $\frac{6}{2}=3.$

Példa:

$$\sqrt{3\ 25{,}42}=18{,}1.$$

A gyök alatti szám vegyesszám. Ilyen esetben a páros számokra bontás szempontjából csak az egészszámokat vesszük figyelembe. Ez esetben a páros számokra bontás után egy számjegy marad fenn, tehát a D_1 skálát használjuk. A számjegyek száma:

$$\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Tizedesszámok gyökeinek kiszámítására térünk át. Tizedesszámok esetén a tizedesvessző utáni zérusok száma határozza meg az eredményben a tizedesvessző helyét. A zérusok számát negatív előjellel vesszük,

Példa:

$$\sqrt{0,2} = \sqrt{0,20} = 0,447.$$

$$0,20 = \frac{20}{100}$$

Ha e törtből akarunk gyököt vonni, akkor külön a számlálóból és külön a nevezőből vonunk gyököt és a kettőt elosztjuk egymással. Ha 20-ból akarunk gyököt vonni, akkor a D_2 skálát kell használni.

A D_2 skálán beállítjuk a 20-at és az A skálán a futó segélyével leolvassuk az eredményt: 447-et.

A tizedesvessző helyét, tekintettel arra, hogy a D_2 skálát használtuk, a következőképpen állapítjuk meg: $0 : 2 = 0$. A tizedesvessző után nincs 0.

Példa:

$$\sqrt{0,02} = 0,141.$$

Ha az előbb ismertetett eljárást alkalmazzuk, azonnal láthatjuk, hogy a D_1 skálát kell az ismert módon használni. A számjegyek száma:

$$\frac{-1+1}{2} = 0,$$

tehát a tizedesvessző után nincs 0.

Példa: $\sqrt{0,002} = 0,0447.$

A feladatot a következőképpen írhatjuk:

$$0,002 = 0,0020 = \frac{20}{10000}.$$

Tehát az előzőkből már tudjuk, hogy a D_2 skálát fogjuk használni és az ismert módon az A skálán olvassuk le az eredményt,

A tizedesvessző utáni 0-ok számát úgy állapítjuk meg, hogy a gyök alatti számban a tizedesvessző utáni 0-ok számát negatív előjellel véve, 2-vel osztjuk. Tehát

$$\frac{-2}{2} = -1.$$

Emlékeztetünk az algebra ama szabályára, hogy ha negatív számot pozitív számmal osztunk, az eredmény negatív. E példában tehát a gyökvonás után a tizedesvessző utáni 0-ok száma 1.

Az eddigiekből már annyit látunk, hogy ha a tizedesvessző utáni 0-ok száma 0, ill. páros, akkor a D_2 skálát, ha pedig 1, ill. páratlan, akkor a D_1 skálát használjuk a gyök számjegyeinek kijelölésére.

Példa: $\sqrt{0{,}266} = 0{,}515.$

A gyök alatti számban a tizedesvessző után nincsen 0, tehát az előzők szerint a D_2 skálát használjuk és az ismert módon az A skálán olvassuk le az eredményt: 515-öt.

A tizedesvessző utáni 0-ok száma : $0 : 2 = 0.$

Példa: $\sqrt{0{,}00000\,26} = 0{,}00161.$

A gyök alatti számban a tizedesvessző utáni 0-ok száma 5. Ha a 0-okat a tizedesvesszőtől jobbra párosan csoportosítjuk, akkor egy 0 marad fenn, tehát a D_1 skálát használjuk, és az eredményt az A skálán olvassuk le: 161-et.

A tizedesvessző utáni zérusok száma:

$$\frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2,$$

tehát az eredményben a tizedespont utáni 0-ok száma $= 2$,

Példa: $\sqrt{0{,}00000026} = 0{,}00051.$

E példa az előzőtől abban különbözik, hogy eggyel több a tizedesvessző utáni 0-ok száma, éspedig páros. Tehát a gyökvonáshoz a D_2 skálát fogjuk használni. Az eredményt az A skálán olvassuk le: 51-et.

Ezek alapján a tizedesvessző után 0-ok száma:

$$\frac{-6}{2} = -3$$

A tizedesvessző utáni zérusok száma 3.

Példa: $\sqrt{0{,}00000328} = 0{,}00181.$

A gyök alatti számban a tizedesvessző utáni zérusok. száma 5, tehát páratlan, és így a D_1 skálát kell használni. Az ismert módon az A skálán 181-et olvasunk le.

A tizedesvessző utáni 0-ok száma:

$$\frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Tehát a tizedesvessző utáni 0-ok száma: 2.

Példa: $\sqrt{0{,}000000042} = 0{,}000205.$

A gyök alatti számban a tizedesvessző utáni 0-ok száma 7, tehát ha párosan csoportosítjuk, 1 zérus marad fenn és így a D_1 skálát fogjuk használni. Az eredményt az ismert módon az A skálán olvassuk le: 205-öt.

A tizedesvessző utáni 0-ok száma:

$$\frac{-7+1}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Tehát a tizedesvessző utáni 0-ok száma 3,

Áttekinthetőség kedvéért a számjegyek számának, illetve a tizedesvessző utáni zérusok számának megállapítását a II. táblázatba foglaltuk (77. old.).

E táblázatban szereplő n egész- és vegyesszámok esetén az egészszámjegyek számát jelenti. Tizedesszámok esetében n helyébe a szám tizedesvessző utáni zérusainak számát kell behelyettesíteni negatív előjellel.

G) Szorzás, osztás, négyzetreemelés és négyzetgyökvonás együttes művelete

A következőkben az eddig tárgyalt műveletek kombinációinak léckezelését isn rtetjük:

$\left(\frac{a}{b}\right)^2$ és $a\sqrt{b}$ típusú kifejezések léckezelése

Kör területének kiszámítása

A kör területét a következő képletből számítjuk ki:

$$F = \frac{3{,}14 \cdot d^2}{4} = \frac{d^2}{\frac{4}{3{,}14}} = \left(\frac{d}{c}\right)^2,$$

ahol c állandó, amelyet egyszersmindenkorra kiszámítunk:

$$c = \sqrt{\frac{4}{3{,}14}} = 1{,}13.$$

Ezek alapján a kör területét úgy számítjuk ki, hogy az átmérőt osztjuk 1,13-dal és az eredményt négyzetreemeljük. Képletben kifejezve:

$$F = \left(\frac{d}{1{,}13}\right)^2.$$

II. táblázat

A négyzetreemelés és négyzetgyökvonás számjegyszámainak megállapítása

Négyzetreemeléskor

	egész- és vegyesszám esetén	*tiszta tizedesszám esetén*
ha a D_1 skálán olvassunk le, akkor	a négyzetreemelt szám egész számjegyeinek száma egyenlő: az alap egészszámjegyeinek kétszerese —1, vagyis $(2n - 1)$	a négyzetreemelt szám tizedesvessző utáni zérusainak száma egyenlő az alap tizedesvessző utáni zérusai számának kétszerese —1, vagyis $(2n - 1)$;
ha a D_2 skálán olvasunk le, akkor	a négyzetreemelt szám egészszámjegyeinek száma egyenlő: az alap egészszámjegyeinek kétszerese, vagyis $2n$	a négyzetreemelt szám tizedesvessző utáni zérusainak száma egyenlő az alap tizedesvessző utáni zérusainak számának kétszerese, vagyis $2n$

Négyzetgyökvonáskor

	egész- és vegyesszám esetén	*tiszta tizedesszám esetén*
ha a D_1 skálából indulunk ki (mert a számjegyek száma, illetve a tizedesvessző utáni zérusok száma páratlan), akkor	a gyök számjegyeinek számát úgy kapjuk meg, hogy a gyökjel alatti számjegyek számához 1-et hozzáadunk és az egészet elosztjuk 2-vel, vagyis a gyök számjegyeinek száma $\frac{n+1}{2}$	a gyökjel alatti szám tizedesvessző utáni zérusainak számához 1-et hozzáadunk és az egészet elosztjuk 2-vel, vagyis a gyök számjegyeinek száma $\frac{n+1}{2}$
ha a D_2 skálából indulunk ki (mert a számjegyek száma, illetve a tizedesvessző utáni zérusok száma páros), akkor	a gyök számjegyeinek számát úgy kapjuk meg, hogy a gyökjel alatti számjegyek számát elosztjuk 2-vel, vagyis a számjegyek száma $\frac{n}{2}$	a gyökjel alatti szám tizedesvessző utáni zérusainak számát elosztjuk 2-vel, vagyis a számjegyek száma $\frac{n}{2}$

Amilyen mértékegységben vettük az átmérőt, annak négyzetreemelt mértékegységében kapjuk a területet, illetve a keresztmetszetet. Ha tehát az átmérőt pl. cm-ben mértük, akkor a területet cm^2-ben kapjuk.

Példa: Legyen a kör átmérője $d = 2$ cm. Számítsuk ki a kör területét.

$$F = \left(\frac{2}{1,13}\right)^2 = 3,14 \text{ cm}^2.$$

A következőkben a tárgyalások egyszerűsítése céljából a karcjel szót csak szükség esetén használjuk, ha a futót említjük, akkor vele együtt a karcjelet is értjük.

A léckezelés menete a következő:

Az *A* skálán megkeressük a 2-es jelet és ide helyezzük a *B* skála 1,13 jelét, amelynek helyét némely lécen *c*-vel jelölik meg, és a *B* skála 1-es jele felett a D_1 skálán leolvassuk az eredményt, 314-et.

Némely léc futóján 3 karcjelet találunk. Az egyik — a baloldali — esetleg azonban mindkét karcjel az *A* skála léptékében 1,13 távolságban van a középső karcjeltől. A kör területét a következőképpen számítjuk ki:

Az *A* skálán beállítjuk a 2-t a középső karcjellel, és a baloldali karcjellel a D_1 skálán az eredményt olvassuk le.

Mint látható, ebben az esetben kizárólag a futó segítségével olvassuk le a területet, anélkül, hogy a nyelvet elmozdítottuk volna (38. ábra).

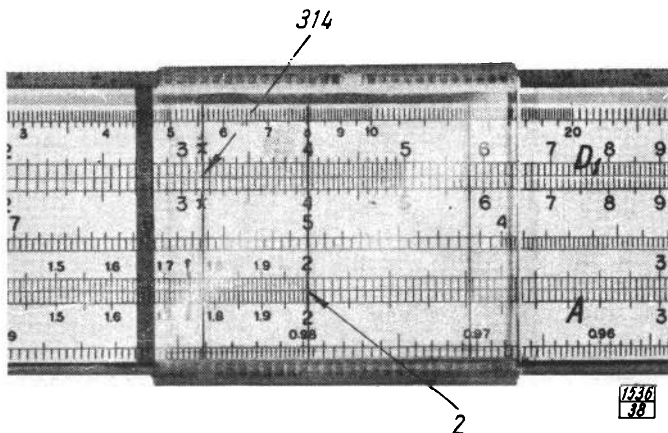
A számjegyszám megállapítását két részletben kell elvégezni. Az első részletben az osztásból származó számjegyek számát állapítjuk meg. Tekintettel arra, hogy példánkban a léc e műveletnél jobbra állt ki, a számjegyek száma:

$$1 - 1 + 1 = 1.$$

A második részletben a négyzetreemeléssel kapcsolatos számjegyszámot állapítjuk meg, és mert a D_1 skálát használtuk, a már ismert szabály szerint:

$$2 \cdot 1 - 1 = 1,$$

tehát végeredményben az egészszámjegyek száma: 1.



38. ábra

A következő példákban a kör területének kiszámításakor csak a futót fogjuk használni.

Példa: Legyen a kör átmérője $d = 20$ cm. Számítsuk ki a kör területét. $F = \left(\frac{20}{1,13}\right)^2 = 314$ cm².

A léckezelés menete a következő:

A futó középső karcjelét az A skála 2-ére állítjuk és a balkarcjelnél a D_1 skálán leolvassuk az eredményt: 314-et.

Az osztásból kifolyólag a számjegyek száma : $2 - 1 + 1 = 2$, és mert a D_1 skálát használtuk, a számjegyek végső száma :

$$2 \cdot 2 - 1 = 3.$$

Példa: Legyen a kör átmérője 400 mm. Számítsuk ki a kör területét. $F = \left(\frac{400}{1{,}13}\right)^2 = 125\,500\ \text{mm}^2$.

A léckezelésnél az A skála 4-es jelét használjuk és az eredményt a D_2 skálán olvassuk le.

A számjegyek száma:

osztásból : $3 - 1 + 1 = 3.$
négyzetreemelésből : $3 \cdot 2 = 6.$

Példa: Legyen a kör átmérője 0,5 m. Számítsuk ki a kör területét.

$$F = \left(\frac{0{,}5}{1{,}13}\right)^2 = 0{,}196\ \text{m}^2.$$

Ebben az esetben a D_2 skálát használjuk és így a számjegyek száma :

$$0 - 1 + 1 = 0 \text{ és } 0 \cdot 2 = 0.$$

Tehát a tizedesvessző után nincsen 0.

Példa: Legyen a kör átmérője 0,05 m. Számítsuk ki a kör területét.

$$F = \left(\frac{0{,}05}{1{,}13}\right)^2 = 0{,}00196\ \text{m}^2.$$

Ebben az esetben is a D_2 skálát használjuk és így a számjegyek száma :

$$-1 - 1 + 1 = -1 \text{ és } 2\,(-1) = -2.$$

Tehát a tizedesvessző utáni 0-ok száma 2.

Kör átmérőjének kiszámítása

Ha adott a kör területe és a kör átmérőjét keressük, akkor a következő képletet használjuk:

$$d = 1{,}13 \sqrt{F}$$

E képlet használatát példákon mutatjuk be.

Példa: Legyen a kör területe 2 m². Számítsuk ki az átmérőjét.

$$D = 1{,}13 \sqrt{2} = 1{,}594 \text{ m.}$$

A gyök alatti számjegyek száma páratlan, tehát a számításhoz a D_1 skálát használjuk. A léckezelés menete a következő:

Megkeressük a D_1 skálán a 2-t. Ide helyezzük a B skála 1-esét és a B skála 1,13 jelénél leolvassuk az eredményt: 1594-et.

A számjegyek számát két részletben állapítjuk meg. Első részben megállapítjuk a négyzetgyökvonásból eredő számjegyek számát:

$$\frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Ezt követi a szorzásból származó számjegyek megállapítása:

$$1 + 1 - 1 = 1,$$

figyelembe véve, hogy a nyelv jobbra állt ki.

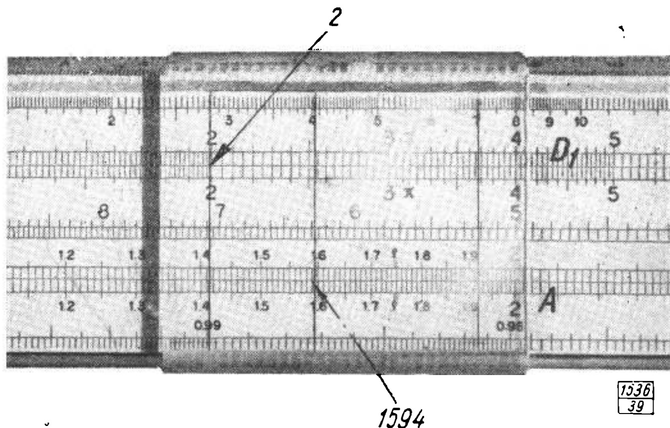
Tehát végeredményben az egészszámjegyek száma: 1.

Ha olyan a lécünk, amelynek futóján 3 karcjel van, akkor a számítást meggyorsítjuk. Ebben az esetben a balkarcjelet a D_1 skála 2-es jeléhez állítjuk és a középső karcjellel leolvassuk az eredményt (39. ábra).

Példa: Legyen a kör területe 20 cm². Számítsuk ki a kör átmérőjét.

$$d = 1{,}13\ \sqrt{20} = 5{,}06 \text{ cm.}$$

A gyök alatti számjegyek száma páros, tehát a számításhoz a D_2 skálát használjuk.



39. ábra

A D_2 skálán megkeressük a gyök alatti számot. Ide helyezzük a futó balkarcjelét és a középső karcjellel az *A* skálán leolvassuk az eredményt : 506-ot.

A számjegyek száma :

a négyzetgyökvonásból : $2/2 = 1$,

a szorzásból $1 + 1 - 1 = 1$,

mert a nyelv jobbra állt ki a szorzásnál. Tehát az egészszámjegyek száma : 1.

Példa: Legyen a kör területe $F = 200$ mm². Számítsuk ki átmérőjét.

$$d = 1{,}13\ \sqrt{200} = 15{,}9 \text{ mm.}$$

A gyök alatti számjegyek száma páratlan, tehát a D_1 skálát használjuk a gyökvonáshoz. A D_1 skála 2-es jeléhez helyezzük a futó balkarcjelét és a középső karcjellel az A skálán 159-et olvasunk le.

A számjegyek száma:

$$\frac{3+1}{2} = 2 \text{ és } 2 + 1 - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Tehát az egészszámjegyek száma 2.

Példa: Legyen a kör területe 0,02 m². Számítsuk ki az átmérőjét.

$$d = 1{,}13 \sqrt{0{,}02} = 0{,}159 \text{ m}.$$

A zérusok száma a gyök alatt páratlan, tehát a D_1 skálát használjuk. A számjegyek száma a gyökvonásból:

$$\frac{-1+1}{2} = 0 \text{ és a szorzásból: } 0 + 1 - 1 = 0.$$

Tehát a tizedesvessző után nincsen 0.

$a^2 \cdot b$ típusú kifejezések léckezelése

Térfogatszámítás

Néhány példán ismertetjük a gyakorlatban leggyakrabban előforduló mértani testek térfogatszámítását és annak léckezelését.

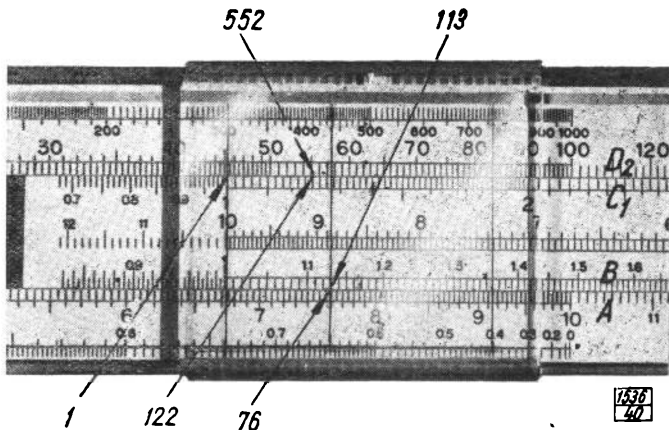
Példa: Legyen a körhenger alapkörének átmérője $d = 76$ mm, a henger magassága $l = 122$ mm, számítsuk ki a körhenger térfogatát.

A henger térfogatát a következő képletből számítjuk ki:

$$\frac{3{,}14}{4} \cdot d^2 \cdot l = \left(\frac{d}{1{,}13}\right)^2 \cdot l = \left(\frac{76}{1{,}13}\right)^2 \cdot 122 = 552\,000 \text{ mm}^3.$$

Mint e képletből látható, a kör keresztmetszetének számításához felhasználtuk a már ismert képletet.

E példa esetére a léckezelés menete a következő: Az A skálán megkeressük a középső karcjellel a 76-ot. A balkarcjellel kijelöljük a kör területét, de az eredményt nem olvassuk le (40. ábra).



40. ábra

A további számításainkhoz felhasználjuk a C_1 és C_2 skálákat.

A számjegyek megállapítása szempontjából a C_1 és C_2, illetve D_1 és D_2 skálákra — ha azokat a szorzásra és osztásra használjuk fel — ugyanazok a szabályok érvényesek, mint az A és B skálákra. Ajánlatos azonban a C_1 skálát a D_1 skálával kapcsolni a számítások alatt és hasonlóan a C_2-t a D_2 skálával.

Folytatjuk példánk léckezelésének ismertetését.

A balkarcjellel a D_2 skálán kijelölt jelhez (amely a négyzetreemelésnek felel meg) állítjuk a C_1 skála 1-es

jelét, és e skála 122 helyén a vele szemben lévő D_2 skálán leolvassuk az eredményt : 552-t.

A számjegyek megállapításánál figyelembe kell venni, hogy a négyzetreemelésnél a D_2 skálát használtuk és így a számjegyek száma :

Osztásnál : $2 - 1 + 1 = 2$
négyzetreemelésnél : $2 \cdot 2 = 4$
szorzásnál : $4 + 3 - 1 = 6$

figyelembe véve, hogy e műveletnél a léc nyelve jobbra állt ki.

Példa: Számítsuk ki a kúp térfogatát, ha az alapkör ∅ 38 mm és a kúp magassága 62 mm.

A kúp térfogatát a következő képletből számítjuk ki :

$$\frac{3{,}14}{4} \cdot d^2 \cdot \frac{l}{3} = \left(\frac{38}{1{,}13}\right)^2 \cdot \frac{62}{3} = 23\,400 \text{ mm}^3.$$

A számjegyek számát a következőképpen számítjuk ki, figyelembe véve a műveletek sorrendjét :

$$\underbrace{2 - 1 + 1 = 2,}_{\text{osztás}} \quad \underbrace{2 \cdot 2 = 4,}_{\text{négyzetreemelés}} \quad \underbrace{4 + 2 - 1 - 1 + 1 = 5.}_{\text{szorzás és osztás}}$$

Súlyszámítás

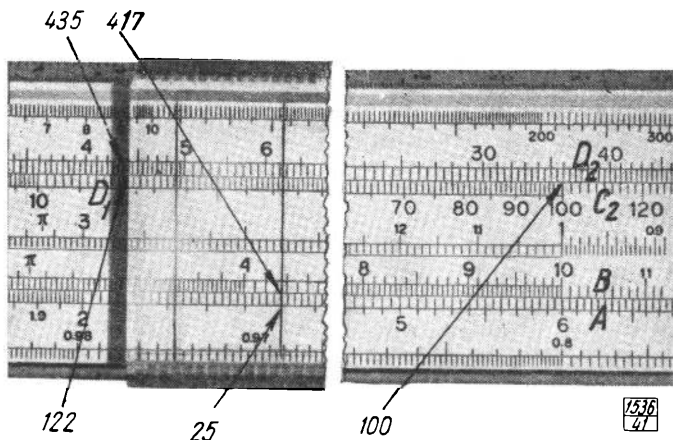
Az imént közölt eredményeket a léccel való súlyszámításra használhatjuk fel.

Példa: Legyen az öntöttvas rúd átmérője $d = 25$ mm és hossza 1,22 m. Számítsuk ki a rúd súlyát.

A test súlyát úgy számítjuk ki, hogy térfogatát szorozzuk a test anyagának fajsúlyával. A fajsúly 1 literre, tehát 1 dm³-re vonatkozik, és így a súlyszámításnál minden méretet deciméterre kell átszámítani.

Példánkra vonatkozólag a súlyszámítás képlete a következő :

$$G = \frac{3{,}14}{4} \cdot d^2 \cdot l \cdot \gamma = \left(\frac{d}{\sqrt{\frac{4}{3{,}14\,\gamma}}}\right)^2 \cdot l = \left(\frac{d}{c_1}\right)^2 \cdot l.$$



41. ábra

Számítsuk ki a c_1 értékét öntöttvasra, amelynek fajsúlya $\gamma = 7{,}3$ kg/dm³.

$$\frac{4}{7{,}3 \cdot 3{,}14} = 0{,}174 \text{ és}$$

ebből gyököt vonva : $c_1 = \sqrt{0{,}174} = 0{,}417$.

Ezzel képletünk a következőképpen alakul át :

$$G = \left(\frac{d}{0{,}417}\right)^2 \cdot l = \left(\frac{0{,}25}{0{,}417}\right)^2 \cdot 12{,}2 = 4{,}35 \text{ kg}.$$

A léckezelés menete a következő :

Az A skálán megkeressük a 25-öt. Fölé helyezzük a B skála 417-es jelét. A B skála 10 jele a D_2 skálán megadja a négyzetreemelés eredményét. A C_2 skála 122 helyén a D_1 skálán leolvassuk az eredményt: 435-öt (41. ábra).

A számjegyek száma:

Osztásnál: $0 - 0 = 0$, a négyzetreemelésnél: $2 \cdot 0 = 0$, a szorzásnál: $0 + 2 - 1 = 1$.

A fenti számítást öntöttvasra végeztük el. A III. táblázatban néhány, a gyakorlatban használt anyagra is kiszámítottuk a c_1 értékét, amivel a súlyszámítást lényegesen meggyorsítjuk.

III. táblázat

Súlyszámítási állandók

Anyag	Fajsúly	0,785 fajsúly	$\frac{1}{0{,}785\,\text{fajsúly}}$	$c_1 = \sqrt{\frac{1}{0{,}785\,\text{fajsúly}}}$
Acél	7,8	6,12	0,163	0,404
Öntöttvas	7,3	5,7	0,174	0,417
Réz, Bronz	8,8	6,9	0,145	0,38
Ólom	11,5	9,—	0,111	0,333
Fehérfém	7,2	5,65	0,178	0,42
Alumínium	2,7	2,12	0,470	0,68
Wolfram	19,2	15,1	0,066	0,257
Ón	7,4	5,8	0,173	0,415
Cink	7,—	5,5	0,183	0,4275

E táblázat használata

A 85. oldalon ismertettük a súlyszámítást, amelyhez felhasználtuk az anyag c_1 értékét. Ezeket a c_1 értékeket találjuk meg e táblázatban különböző anyagokra.

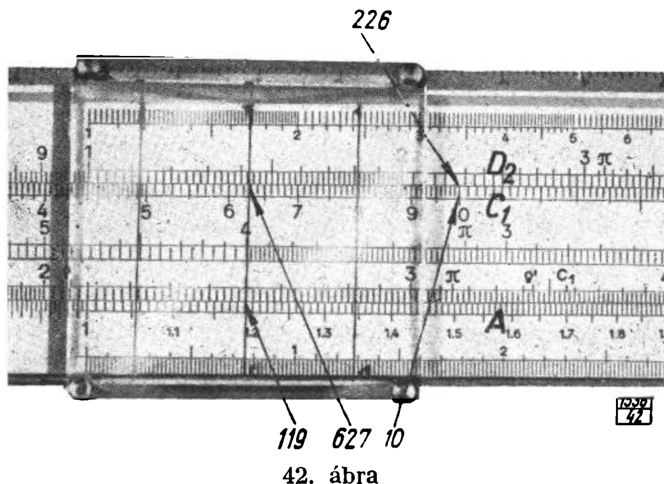
Gyakorlásul számítsuk ki e táblázat adatait. Felhasználhatjuk az állandó számmal való szorzás és a reciprok skála használatával kapcsolatos ismereteinket.

$\frac{a^2}{b}$ típusú kifejezések léckezelése

Erre az esetre a következő példát dolgozzuk ki:

Példa: $\frac{119^2}{627} = 22{,}6.$

Az A skálán beállítjuk a 119-et. Ide állítjuk a futót, és karcjeléhez a C_1 skála 627 jelét helyezzük, a C_1 skála 10-es jelénél leolvassuk az eredményt: 226-ot (42. ábra).



42. ábra

A számjegyek száma, figyelembevéve, hogy a D_1 skálát használtuk:

$$2 \cdot 3 - 1 - 3 = 6 - 4 = 2.$$

Tehát a számjegyek száma: 2.

$\frac{a}{b^2}$ típusú kifejezések léckezelése

Példa: $\dfrac{65}{115^2} = 0,0049.$

Az A skálán megkeressük a 115-öt. Ide állítjuk a futót és a C_1 skála 65-ös jelét. A D_1 skála 1-es jelénél a C_1 skálán olvassuk le az eredményt : 49-et. A számjegyek száma :

$$2 - (3 \cdot 2 - 1) + 1 = -2$$

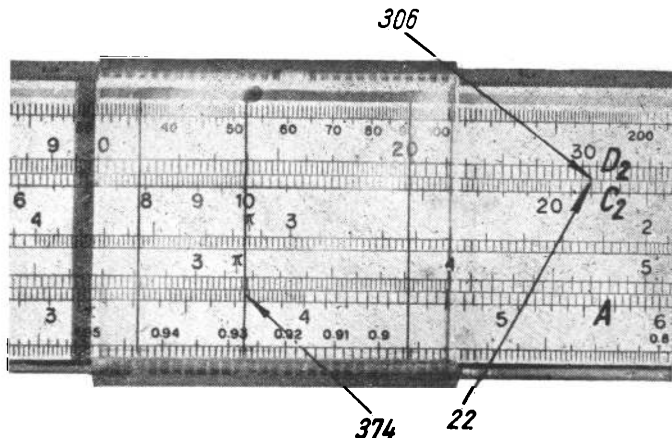
Tehát a tizedesvessző utáni 0-ok száma : 2.

Példa: $\dfrac{0,035}{0,0016^2} = 13\,650.$

A léckezelés menete az előzőével egyezik. A számjegyek száma, tekintettel arra, hogy a D_1 skálát használjuk :

$$-1 - (-2 \cdot 2 - 1) + 1 = 5.$$

Az eredményt a D_1 skála 1-énél olvassuk le.



43. ábra

$\sqrt{\frac{a}{b}}$ típusú kifejezések léckezelése

Példa: $$\sqrt{\frac{306}{22}} = 3{,}74.$$

A léckezeléshez a C_2 és D_2 skálát használjuk, a gyökvonás eredményét az A skálán olvassuk le. A számjegyek száma:

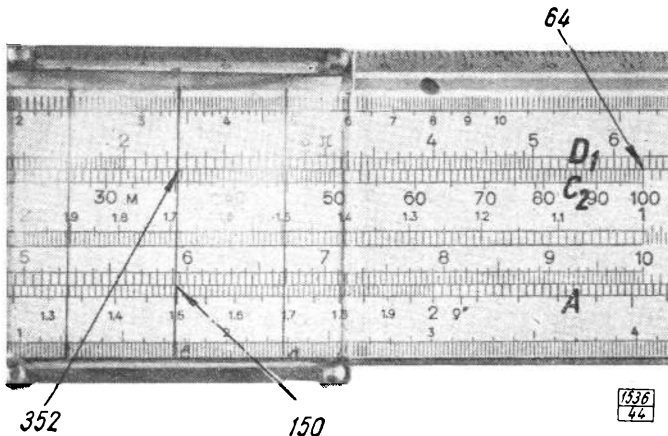
az osztásnál: $3 - 2 + 1 = 2$, a gyökvonásnál: $\frac{2}{2} = 1$.

Tehát az egészszámjegyek száma: 1 (43. ábra).

$\sqrt{a \cdot b}$ típusú kifejezések léckezelése

Példa: $$\sqrt{64 \cdot 352} = 150.$$

A léckezeléshez ebben az esetben a C_2 és a D_1 skálát használjuk és az eredményt az A skálán olvassuk le.



44. ábra

A számjegyek száma: $\frac{5+1}{2} = 3$, mégpedig azért, mert a gyökvonásnál a D_1 skálát használtuk. Abban az esetben, ha a gyök alatti szorzáseredményben a számjegyek száma páros, akkor a C_2 és D_2 skálát használjuk (44. ábra).

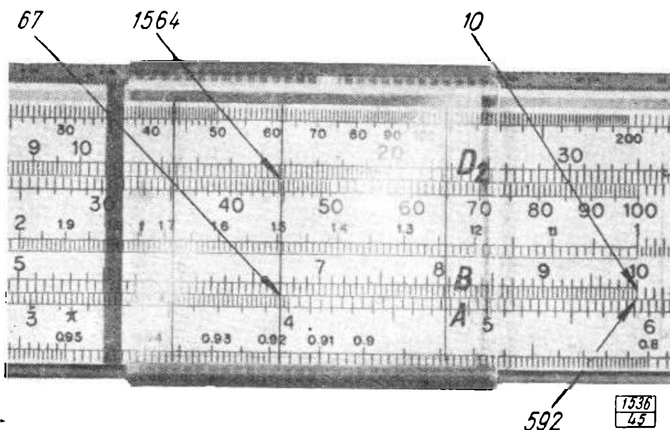
$\frac{\sqrt{a}}{b}$ típusú kifejezések léckezelése

Példa: $$\frac{\sqrt{1564}}{0{,}067} = 592.$$

A már tárgyalt módon a D_2 skálát használjuk a négyzetgyökvonáshoz, és az osztás elvégzéséhez az A és B skálát vesszük igénybe.

A számjegyek száma: $\frac{4}{2} - (-1) = 3.$

Tehát a számjegyek száma 3 (45. ábra).



45. ábra

$\frac{a}{\sqrt{b}}$ típusú kifejezések léckezelése

Példa: $$\frac{0{,}00165}{\sqrt{485}} = 0{,}000075.$$

A D_1 skálán beállítjuk a 485-öt és az A skálán kapjuk a gyökét. Ide állítjuk a futót. A B skála 165 jelét a futóhoz helyezzük és az A skála 10-énél olvassuk le a B skálán az eredményt : 75-öt.

A számjegyek száma : $-2-2=-4$.

Tehát a tizedesvessző utáni 0-ok száma : 4.

$\frac{1}{\sqrt{a \cdot b}}$ típusú kifejezések léckezelése

Példa: $$\frac{1}{\sqrt{36 \cdot 0{,}0125}} = 1{,}49.$$

A C_2 és D_2 skálát használjuk. A gyökvonás eredményét az A skálán olvassuk le. A reciprok érték leolvasásához az E skálát használjuk (46. és 47. ábra).

$(a \cdot b)^2$ típusú kifejezések léckezelése

Példa: $(125 \cdot 37)^2 = 21\,500\,000.$

A léckezeléshez az A, B és D_2 skálákat használjuk. A számjegyek száma :

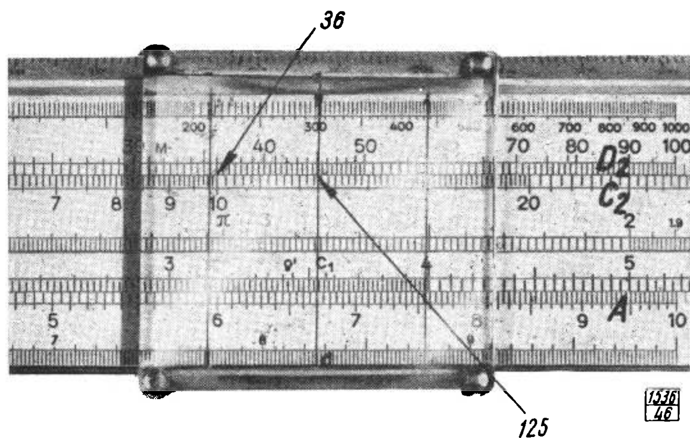
$$3+2-1=4 \text{ és } 2 \cdot 4 = 8.$$

Tehát a számjegyek száma : 8.

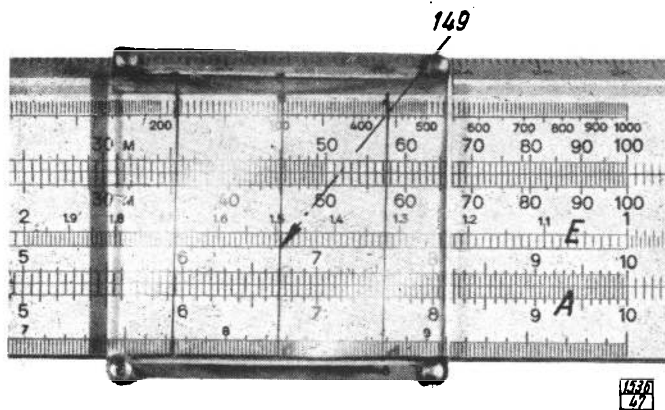
$\frac{a \cdot b^2}{c}$ típusú kifejezések léckezelése

Példa: $$\frac{327 \cdot 82^2}{72} = 30\,500.$$

Az A skála 82-es jegyéhez helyezzük a futót. Az ezt követő számításokat a C_2 és D_2 skálákon végezzük el.



46. ábra



47. ábra

A számjegyek száma a négyzetreemelésnél: $2 \cdot 2 = 4$ és a további műveleteknél: $4 + 3 - 2 = 7 - 2 = 5$.

H) A léceken található jelzések ismertetése és azok megfelelő számértékeinek levezetése

A logarléceken a számokon kívül betűjelzéseket is használnak. Ezek olyan állandók, amelyek gyakrabban előforduló számításoknál a számok keresését és beállítását az egyes skálákon megkönnyítik és így a léccel való számolást meggyorsítják.

A körrel kapcsolatos jelzések

A léc egyes skáláin megtaláljuk a Ludolf-féle szám, a π helyét. Ugyancsak megtaláljuk a $c = 1{,}13$-nak megfelelő jelzést, amelynek eredetét már a 76. oldalon ismertettük.

Ívhosszal kapcsolatos számítások

A teljes kör ívhossza egyenlő a kör kerületével. A teljes szög 360°. Ezek alapján a szöghöz tartozó ívhosszat ki tudjuk számítani. Igen megkönnyíti a számítást, ha a kör sugara az egységgel egyenlő.

A számítás menete a következő:

Kiszámítjuk az 1°-nak megfelelő ívhosszat az egységnyi sugarú körön. Ha ezt az adatot ismerjük, akkor tetszőleges fokszámhoz és sugárhoz tartozó körív hosszát akként számítjuk ki, hogy az egységnyi sugarú körön az 1°-nak megfelelő ív hosszát szorozzuk a fokok számával és a sugárral. Az egységnyi sugarú kör kerülete egyenlő a Ludolf-féle szám kétszeresével. Ismeretes, hogy a fokban 60 perc és 3600 mp van.

A következőkben kiszámítjuk az egy foknak, az egy percnek és az egy másodpercnek megfelelő ívhosszat, természetesen az egységnyi sugarú körön.

Példa: Számítsuk ki az 1°-nak megfelelő egységnyi sugarú körív hosszát.

Hármasszabályt írunk fel: ha 3,14-nak 180° felel meg, kérdés, mennyi felel meg egy foknak. Az eredmény a következő:

$$\frac{3,14}{180} = 0,01745 = \frac{1}{\frac{180}{3,14}} = \frac{1}{57,3}.$$

A léceken az 57,3-et ϱ_0-val jelölik. A 2512 sz. Gamma-lécen az 1745 van külön feltüntetve; jele: ϱ.

Példa: 25°-nak megfelelő ívhosszat számítsunk 150 mm sugarú körön.

Hsználjuk e számításhoz a Gamma-lécet. A következő szorzatot kell kiszámítani:

$$25 \cdot 0,0174 \cdot 150 = 65,4 \text{ mm}.$$

Az *A* skálán megkeressük a 25-öt. Ide toljuk a *B* skála 1-esét. Megkeressük a *B* skálán a ϱ jelet és ide toljuk a futót. E helyhez állítjuk a *B* skála 1-esét és a *B* skála 15 helyén leolvassuk az *A* skálán az eredményt: 654-et. A számjegyek száma:

$$2 - 1 + 3 - 2 = 2,$$

mert a nyelv kétszer állt ki jobbra.

Példa: Számítsuk ki az 1 percnek megfelelő ívhosszat az egységnyi sugarú körön.

Ha az 1°-nak megfelelő értéket osztjuk 60-nal, akkor kapjuk az 1′-nek megfelelő ívhosszat.

$$1' = \frac{1}{60 \cdot \varrho_0} = \frac{1}{60 \cdot 57,3} = \frac{1}{3438} = \frac{1}{\varrho'}.$$

Példa: Számítsuk ki az 1 másodpercnek megfelelő ívhosszat az egységnyi körön.

$$1'' = \frac{1}{3600 \cdot \varrho_0} = \frac{1}{206\,280} = \frac{1}{\varrho''}.$$

Karcjelek szerepe a léckezelésnél

A futón lévő karcjelek szerepét a kör területének kiszámításával kapcsolatban a 78. oldalon ismertettük. Ebben az esetben a baloldali és a középső karcjel távolsága az *A* és *B* skála léptékében 1,13, a *C* és *D* skála léptékében 1,27.

A „Gamma 2512" léc futóján található harmadik karcjelet a lóerő és kilowatt átszámításoknál használjuk.

Ismeretes, hogy

1 kilowatt = 1,355 lóerő, illetve 0,736 kilowatt =

$$1 \text{ lóerő } \left(\text{mert } \frac{1}{1{,}355} = 0{,}736\right).$$

Ezzel összefüggő számítások megkönnyítésére szolgál a „Gamma 2512" lécen a *jobbszélső* karcjel, amely a balszélsőtől az *A*, illetve *B* skála léptékében 1,355 osztásnyira van.

Példa: 12 kilowatt (kW) hány lóerő?

A balszélső karcjelet az *A* skála 12 jeléhez állítjuk és ugyancsak az *A* skálán a jobbszélső karcjelnél leolvassuk az eredményt:

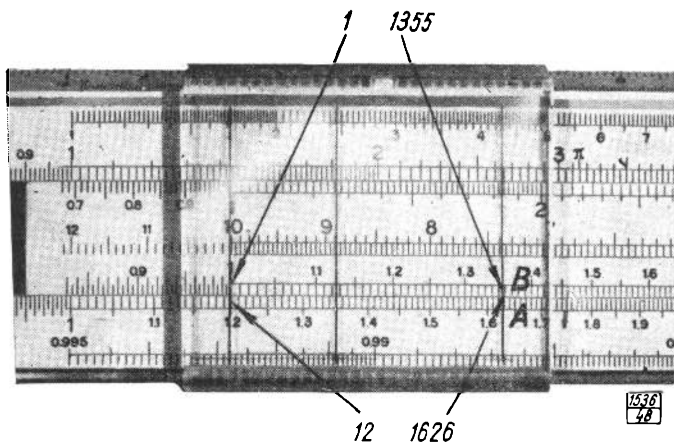
$$12 \cdot 1{,}355 = 16{,}26 \text{ lóerő}$$

(48. ábra).

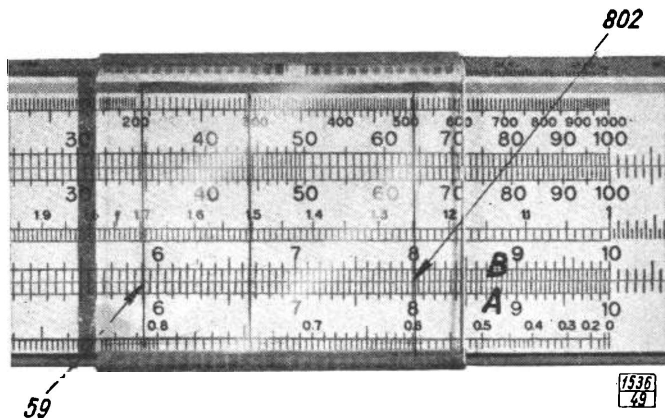
Példa: 8,02 lóerő hány kilowatt?

Az *A* skálán a 8,02 jelhez állítjuk a futó jobbszélső karcjelét és a balszélső karcjelnél leolvassuk az eredményt:

$$8{,}02 \cdot 736 = 5900 \text{ watt} = 5{,}9 \text{ kW kereken (49. ábra).}$$



48. ábra



49. ábra

K) Köbreemelés és köbgyökvonás

A köbreemelés és köbgyökvonás a hatványozás egyik különleges esete. Köbreemelés esetén a hatvány kitevője: 3, a köbgyökvonásnál: 1/3.

A hatvány logaritmusát, mint azt a 11. oldalon ismertettük, úgy számítjuk ki, hogy az alap logaritmusát szorozzuk a kitevővel, esetünkben 3-mal, illetve 1/3-dal. Ebből azonnal következik: a köbreemeléshez és köbgyökvonáshoz, illetve e műveletek léckezeléséhez két olyan skálára van szükség, amelyek közül az egyik skála egységének (1-től 10-ig terjedő) hossza 1/3-a a másik skála egységnyi hosszának.

E két művelethez használjuk az *A* és az *F* skálát. Az *F* skála 3 részre bontható, e részeket sorban F_1, F_2 és F_3-mal jelöljük. Mindegyik skála az *A* skála egységnyi hosszának 1/3-a, tehát a kitűzött feladat megoldására használható.

A különböző *F* skálákon olvassuk le a 3. hatványt, tehát a számok köbét. Viszont ha az *F* skáláról indulunk ki, akkor az *A* skálán olvashatjuk le a köbgyököt.

Először a köbreemeléssel foglalkozunk. Előre is látható, hogy a számjegyek száma, valamint a tizedesvessző utáni 0-ok száma az alap hasonló értékeinek háromszorosa lenne. Azonban, mint látni fogjuk, az egyes *F* skálák szerint e szabály alól eltérés lesz. Ez esetben elsősorban azt kell megállapítani, vajjon e műveletnél melyik *F* skálát használtuk. Ezzel kapcsolatban ismertetni kell azt a szabályt, amelynek segítségével a számjegyek számát meg lehet állapítani.

Áttekinthetőség kedvéért a köbreemelés és a köbgyökvonás műveletét táblázatba foglaltuk.

A IV. táblázatban *n* a hatványalap számjegyszámát jelenti.

IV. táblázat

Egész- és vegyesszámok köbreemelése (50. ábra)

Ha a leolvasás skálája	F_1	F_2	F_3
akkor az eredmény számjegyszáma	$3 \cdot n - 2$	$3 \cdot n - 1$	$3 \cdot n$
Példa	$2^3 = 8$	$4^3 = 64$	$9^3 = 729$
Számjegyszám	$3 \cdot 1 - 2 = 1$	$3 \cdot 1 - 1 = 2$	$3 \cdot 1 = 3$
Példa	$1{,}272^3 = 2{,}06$	$26^3 = 17\,600$	$78^3 = 474\,500$
Számjegyszám ..	$3 \cdot 1 - 2 = 1$	$3 \cdot 2 - 1 = 5$	$3 \cdot 2 = 6$
Példa	$113^3 = 1\,440\,000$	$27{,}8^3 = 21\,500$	$8226{,}25^3 = 56 \cdot 10^{10}$
Számjegyszám ..	$3 \cdot 3 - 2 = 7$	$3 \cdot 2 - 1 = 5$	$3 \cdot 4 = 12$

A hatvány alapját beállítjuk az A skálán, és a futóval leolvassuk az eredményt valamelyik F skálán. Aszerint, amint az eredmény az F_1, F_2 vagy F_3 skálán jelentkezik, állapítjuk meg az eredmény számjegyeinek számát.

206

1272

50. ábra

A léckezelésnél tehát ügyelni kell arra, hogy melyik F skálán olvassuk le az eredményt.

Az V. táblázatban n a tizedesvessző utáni zérusok negatív előjellel vett számát jelenti.

Az V. táblázat alapján a következő szabályt állíthatjuk fel :

A hatvány alapját megkeressük az A skálán. Ide helyezzük a futót és az eredményt valamelyik F skálán olvassuk le. Aszerint, amint az eredmény az F_1, F_2 vagy az F_3 skálán jelentkezik, állapítsuk meg a számjegyek számát, az V. táblázat adatai szerint. Megjegyezzük, hogy a szám-

V. táblázat

A tizedesszámok köbreemelése

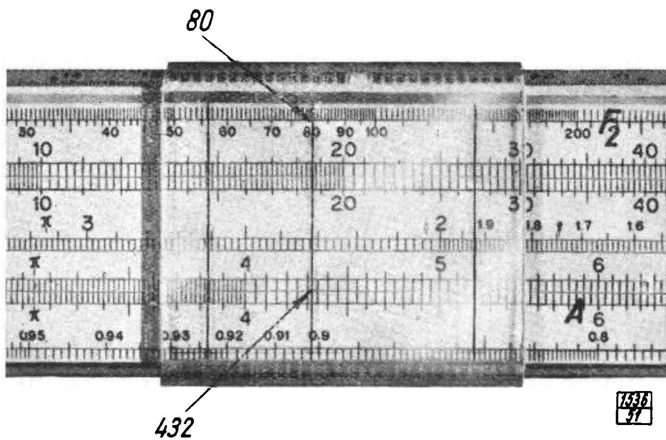
Ha a leolvasás skálája	F_1	F_2	F_3
akkor az eredmény számjegyszáma	$3 \cdot n - 2$	$3 \cdot n - 1$	$3 \cdot n$
Példa	$0{,}2^3 = 0{,}008$	$0{,}4^3 = 0{,}064$	$0{,}9^3 = 0{,}729$
Számjegyszám ..	$3 \cdot 0 - 2 = -2$	$3 \cdot 0 - 1 = -1$	$3 \cdot 0 = 0$
Példa	$0{,}02^3 = 0{,}000008$	$0{,}004^3 = 0{,}000000064$	$0{,}0009^3 = 0{,}000000000729$
Számjegyszám ..	$3(-1) - 2 = -5$	$3(-2) - 1 = -7$	$-3 \cdot 3 = -9$
Példa	$0{,}137^3 = 0{,}00256$	$0{,}367^3 = 0{,}049$	$0{,}527^3 = 0{,}146$
Számjegyszám ..	$3 \cdot 0 - 2 = -2$	$3 \cdot 0 - 1 = -1$	$3 \cdot 0 = 0$
Példa	$0{,}0198^3 = 0{,}0000078$	$0{,}0000396^3 = 0{,}000000000000062$	$0{,}0000823^3 = 0{,}00000000000056$
Számjegyszám ..	$3(-1) - 2 = -5$	$3(-4) - 1 = -13$	$-4 \cdot 3 = -12$

jegyszámon ebben az esetben a tizedesvessző utáni 0-ok számát értjük negatív előjellel.

A VI. táblázatban, amely a köbgyökvonással foglalkozik, n a számjegyek számát jelenti.

A VI. táblázat alapján a következő szabályt állíthatjuk fel:

Mindenekelőtt meg kell állapítanunk, hogy melyik F skálát kell az adott esetben használni. E célból a gyök alatti számot a tizedesvesszőtől balra hármas számcsoportokra osztjuk. Ha egy számjegy marad fenn, akkor az F_1 skálát használjuk, ha két számjegy marad fenn, az F_2-t és ha nem marad számjegy fenn, akkor az F_3 skálát használjuk. Az eredményt mindenkor a futó segélyével az A skálán olvassuk le. A számjegyek számát a VI. táblázat szerint állapítjuk meg.



51. ábra

VI. táblázat

Az egész- és vegyesszámok köbgyökvonása (51. ábra)

Ha a beállítás skálája	F_1	F_2	F_3
akkor a számjegyszáma	$\frac{n+2}{3}$	$\frac{n+1}{3}$	$\frac{n}{3}$
Példa	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{80} = 4{,}32$	$\sqrt[3]{800} = 9{,}28$
Számjegyszám..	$\frac{1+2}{3} = 1$	$\frac{2+1}{3} = 1$	$\frac{3}{3} = 1$
Példa	$\sqrt[3]{8000} = 20$	$\sqrt[3]{80\,000} = 43{,}2$	$\sqrt[3]{800\,000} = 92{,}8$
Számjegyszám..	$\frac{4+2}{3} = 2$	$\frac{5+1}{3} = 2$	$\frac{6}{3} = 2$
Példa	$\sqrt[3]{9\,010\,000} = 208{,}3$	$\sqrt[3]{89\,500\,000} = 447$	$\sqrt[3]{125\,000\,000} = 500$
Számjegyszám..	$\frac{7+2}{3} = 3$	$\frac{8+1}{3} = 3$	$\frac{9}{3} = 3$
Példa	$\sqrt[3]{8{,}52} = 2{,}14$	$\sqrt[3]{26{,}16} = 2{,}93$	$\sqrt[3]{325{,}4} = 6{,}9$
Számjegyszám..	$\frac{1+2}{3} = 1$	$\frac{2+1}{3} = 1$	$\frac{3}{3} = 1$

A VII. táblázatban n a tizedesvessző utáni 0-ok számát jelenti negatív előjellel. A táblázatból a számjegyek megállapítására a következő szabályt állíthatjuk fel:

A gyök alatt a tizedesvesszőtől jobbralévő zérusokat hármas csoportokra osztjuk. Ha e felosztásnál két zérus marad fenn, akkor az F_1 skálát, ha egy zérus marad fenn, akkor az F_2 skálát, ha nem marad fenn, akkor az F_3 skálát használjuk a gyök alatti szám beállítására. A számjegyek számát, a táblázat adatai szerint, aszerint állapítjuk meg, hogy melyik F skálát használtuk.

Eddig a köbreemelés és köbgyökvonás műveletének léckezelését arra az esetre ismertettük, amikor a lécen van köbskála. A következőkben bemutatjuk a *köbreemelés és köbgyökvonás léckezelését arra az esetre, ha a lécen nincsen köbskála.*

A feladat megoldására a harmadik hatványt a következő alakban írjuk fel:

$$a^3 = a^2 \cdot a.$$

Tehát a műveletet visszavezettük egy négyzetreemelésre és egy szorzásra. Ezek pedig az előzőkből ismert műveletek, tehát végeredményben ismétlésről van szó. Erre az esetre néhány példát mutatunk.

Példa: $9^3 = 9^2 \cdot 9 = 729.$

Az A skálán megkeressük a futóval a 9-et. Ennek négyzetét a D_2 skálán olvassuk le. Ide helyezzük a C_2 skála 100-asát (vagy 10-esét) s e skála 90(9)-esénél leolvassuk az eredményt (52. ábra).

A számjegyek száma

A négyzetreemelésnél: $2 \cdot 1 = 2$, a szorzásnál ehhez $+1$ járul és így a számjegyek száma; 3.

VII. táblázat

Tizedesszámok köbgyökvonása

Ha a beállítás skálája	F_1	F_2	F_3
akkor a gyök számjegyszáma	$\frac{n+2}{3}$	$\frac{n+1}{3}$	$\frac{n}{3}$
Példa	$\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$	$\sqrt[3]{0{,}08} = 0{,}43$	$\sqrt[3]{0{,}8} = 0{,}93$
Számjegyszám ..	$\frac{-2+2}{3} = 0$	$\frac{-1+1}{3} = 0$	$\frac{0}{3} = 0$
Példa	$\sqrt[3]{0{,}000\,008} = 0{,}02$	$\sqrt[3]{0{,}000\,08} = 0{,}043$	$\sqrt[3]{0{,}000\,8} = 0{,}093$
Számjegyszám ..	$\frac{-5+2}{3} = -1$	$\frac{-4+1}{3} = -1$	$\frac{-3}{3} = -1$
Példa	$\sqrt[3]{0{,}000\,00162} = 0{,}0117$	$\sqrt[3]{0{,}0257} = 0{,}295$	$\sqrt[3]{0{,}000\,000\,00097} = 0{,}00098$
Számjegyszám ..	$\frac{-5+2}{3} = -1$	$\frac{-1+1}{3} = 0$	$\frac{-9}{3} = -3$

Példa: $0{,}0198^3 = 0{,}0198^2 \cdot 0{,}0198 = 0{,}0000078.$

E művelet elvégzéséhez az A, D_1, C_1 skálát használjuk. A tizedesvessző utáni zérusok száma:

$$-2 \cdot 1 - 1 - 1 - 1 = -5,$$

figyelembe véve, hogy a szorzásnál a léc egyszer jobbra állt ki.

52. ábra

Példa: $0{,}0000823^3 = 0{,}000\,000\,000\,000\,56.$

Ez alkalommal az A, D_2, C_2 skálát használjuk. A tizedesvessző utáni zérusok száma:

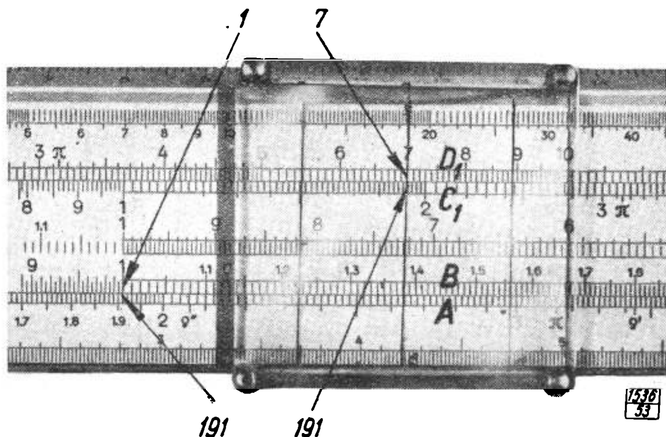
$$-2 \cdot 4 - 4 = -12.$$

Ezek után áttérünk a köbgyökvonás műveletére, abban az esetben, ha nincs köbskála,

Példa: $\sqrt[3]{7} = 1{,}91,$

A léckezelés menete a következő.

Megkeressük a D_1 skálán a 7-et. Ide helyezzük a futót. Keressük a C_1 skálán és ugyanakkor az A skálán, éspedig a B skála 1-énél azt a jelet, amelynél a két leolvasás, egyenlő. Más szavakkal: a C_1 skálán a D_1 skála 7-ese kijelöli az 1,91-et és ugyanakkor az A skálán a B skála 1-ese is kijelöli az 1,91-et. A számjegyek száma: 1 (53. ábra).



53. ábra

Példa: $\sqrt[3]{87} = 4{,}43.$

A művelet elvégzéséhez az A, C_1, D_2 skálát használjuk. A számjegyek száma: 1.

Példa: $\sqrt[3]{429} = 7{,}52.$

A művelet elvégzéséhez az A, C_2, és D_2 skálát használjuk. A számjegyek száma: 1.

Példa: $\sqrt[3]{0{,}323} = 0{,}686.$

A művelet elvégzéséhez az A, C_2, D_2 skálát használjuk. A tizedesvessző után nincsen 0.

Példa: $\sqrt[3]{0{,}026} = 0{,}296$.

A művelet elvégzéséhez az A, C_1, D_2 skálát használjuk.

Példa: $\sqrt[3]{0{,}007} = 0{,}191$.

E művelethez az A, C_1, D_1 skálát használjuk. E példákból is beigazolódott, hogy mennyivel kedvezőbb a köbreemelés és köbgyökvonás, ha a lécen köbskála van.

L) A logaritmus

10 alapú logaritmus

A 10 alapú logaritmus karakterisztikából és mantisszából áll, mint ezt már a 13. oldalon kifejtettük.

A karakterisztika egész- és vegyesszámok esetén eggyel kisebb, mint a számjegyek száma; tizedesszámoknál eggyel több, mint a tizedesvessző utáni 0-ok száma, de negatív előjellel.

A mantissza mindig egynél kisebb szám, tehát tizedesszám, amelyet az e célra szolgáló táblázatból olvasunk ki.

A logaritmussal két feladatot kell megoldani:

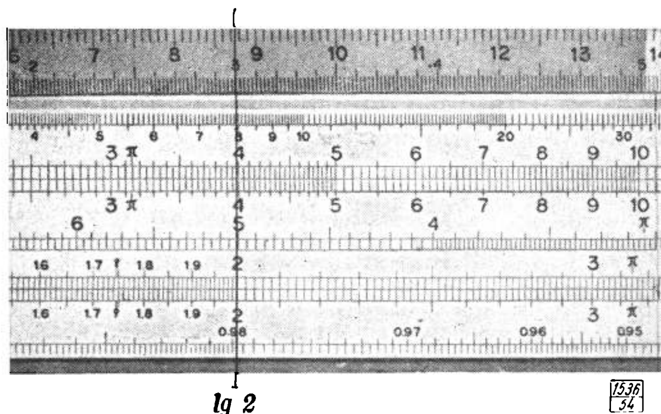
1. Adott a szám és keressük a logaritmusát. E célból az ismert szabály szerint megállapítjuk a karakterisztikát és a lécről olvassuk le a mantisszát. *Ez a logaritmuskeresés.*

2. Adott a logaritmus és keressük a számot. A karakterisztikából megállapítjuk a számjegyek számát; a mantisszát, amely tizedesszám, megkeressük a léc logaritmus skáláján. Az eredményen a karakterisztika alapján kijelelöljük a tizedesvessző helyét. *Ez a logaritmus visszakeresés,*

A léc logaritmus skáláján, a *G* skálán csak a mantisszát olvashatjuk le. A leolvasható számjegyek száma : 3, ami gyakorlati számításoknál általában elegendő.

Ezek után áttérünk a logaritmus műveletének léckezelésére.

Példa: lg 2 = 0,301.



54. ábra

Beállítjuk a futót az *A* skála 2-re és a *G* skálán leolvassuk a mantisszát. A karakterisztika : 0 (54. ábra).

Példa: lg 12 = 1,079.

Megkeressük az *A* skálán a futóval a 12-t és a *G* skálán leolvassuk a mantisszát : 0,079-et. A karakterisztika : 1.

Példa: lg 252 = 2,41.

Megkeressük az *A* skálán a futóval a 252-t és a *G* skálán leolvassuk a mantisszát: 41-et. A karakterisztika: 2.

Példa: lg 0,32 = 0,505 — 1.

Megkeressük az *A* skálán a futóval a 32-t és a *G* skálán leolvassuk a mantisszát: 505-öt. A karakterisztika: —1.

Példa: lg 0,00242 = 0,384 — 3.

Megkeressük az *A* skálán a 242-t és a futó segítségével leolvassuk a *G* skálán a mantisszát: 384-et. A karakterisztika: —3.

Példa: lg 32,5 = 1,51.

Megkeressük az *A* skálán a 325-öt és a futó segítségével leolvassuk a mantisszát: 51-et. A karakterisztika: 1.

Áttérünk a logaritmus visszakeresésének ismertetésére.

Példa: Keressük azt a számot, amelynek logaritmusa 2,728.

Azonnal látjuk a karakterisztikából, amely példánkban 2, hogy a számjegyek száma 3 lesz.

A *G* skálán beállítjuk a mantisszát, 728-at, és a futó felhasználásával leolvassuk az *A* skálán az 534-et. És így

$$\lg 534 = 2{,}728 \quad (55.\ \text{ábra}).$$

Példa: Keressük azt a számot, amelynek logaritmusa 1,125.

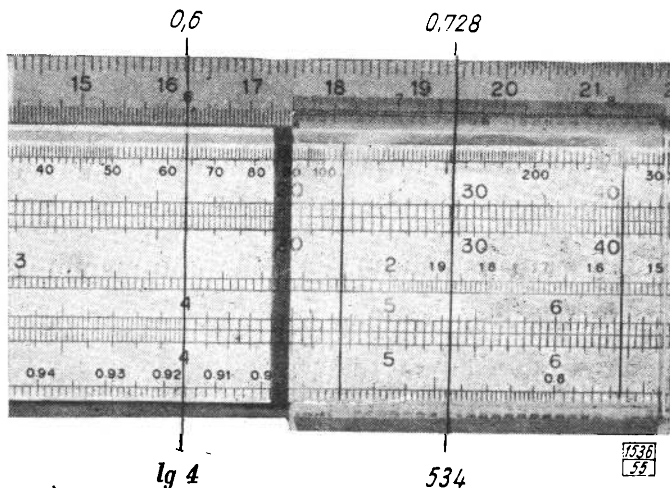
A *G* skálán megkeressük a 125-öt, amely a logaritmus mantisszája, és a futó segítségével leolvassuk az *A* skálán a számot: 133-at. A karakterisztika 1, tehát a számjegyek száma 2. Ezek alapján:

$$\lg 13{,}3 = 1{,}125.$$

Példa: Keressük azt a számot, amelynek logaritmusa 0,75.

A *G* skálán megkeressük a 75-öt és a futó segítségével leolvassuk az *A* skálán az 56-ot. A számjegyek száma ebben az esetben : 1. Az eredmény :

$$\lg 5{,}6 = 0{,}75.$$



55. ábra

Példa: Keressük azt a számot, amelynek logaritmusa — 3,162.

E számból nem tudjuk a karakterisztikát megállapítani, és hogy a karakterisztikát megkaphassuk, a számhoz hozzáadunk 4-et és levonunk 4-et, amivel a szám értéke nem változik. Tehát :

$$-3{,}162 = 4 - 3{,}162 - 4 = 0{,}838 - 4.$$

Ezzel az egyszerű fogással a karakterisztikát megállapíthattuk.

A G skálán megkeressük a 838-at és a futó segítségével az A skálán leolvassuk a 69-et. A számjegyszám ebben az esetben a tizedesvessző után 3 zérus és így az eredmény :

$$\lg 0{,}000\,69 = -3{,}162.$$

Műveletek logaritmussal. A logaritmus a hatványozás műveletét megkönnyíti, mert e nehéz műveletet szorzásra lehet visszavezetni. Ide sorolhatjuk a gyökvonást is, mert ez a művelet végeredményben hatványozásra vezethető vissza.

Elismételjük az idevágó képletet :

$$\lg a^n = n \cdot \lg a.$$

Ha n negatív szám : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Példa: Számítsuk ki, mennyi 175^{11}.

A példában megadott számnak a logaritmusa :

$$11 \cdot \lg 175.$$

Megkeressük az A skálán a 175-öt és leolvassuk a G skálán a 243-at. A karakterisztika : 2. És így

$$11 \cdot \lg 175 = 11 \cdot 2{,}243 = 24{,}673,$$

amiből látható, hogy az eredmény 25 jegyű szám. Ezt a számot vissza kell keresni. E célból megkeressük a G skálán a mantisszát : 673-at és az A skálán leolvasunk 47-et. Ezekután felírhatjuk a végeredményt :

$$175^{11} = 0{,}47 \cdot 10^{25}.$$

Példa: Számítsuk ki $\sqrt[5]{12}$-t.

E szám logaritmusa :

$$\frac{\lg 12}{5}$$

Az *A* skálán megkeressük a 12-t és a futó segítségével a *G* skálán leolvassuk a mantisszát : 078-at. A karakterisztika : 1. Ezek után

$$\frac{\lg 12}{5} = \frac{1{,}078}{5} = 0{,}217.$$

Az osztást az ismert módon az *A* és *B* skálával végezzük el. Az eredmény 0,217, amelyet visszakeresünk. Megkeressük a *G* skálán a 217-et és az *A* skálán leolvassuk az eredményt : 165-öt. A karakterisztika : 1. Ezekután felírhatjuk a végeredményt :

$$\sqrt[5]{12} = 1{,}65.$$

Ha e számítás menetét végigkísérjük, a folytonos léckezelést — ami jellemzője a logarléccel való számolásnak — kétszer szakítottuk meg. Ez a számolást nehézkessé tette. Később olyan eljárást mutatunk be, amellyel ezt a hátrányt ki lehet küszöbölni.

A természetes (e) alapú logaritmus

A természetes logaritmus alapja $e = 2{,}718$. A logaritmus definíciója szerint :

$$e^x = a \text{ és } {}^e\log a = x = \ln a.$$

A 19. oldalon ismertettük az ú. n. természetes logaritmust, és most az ezzel kapcsolatos átszámításra mutatunk be példát. Az idevágó képlet :

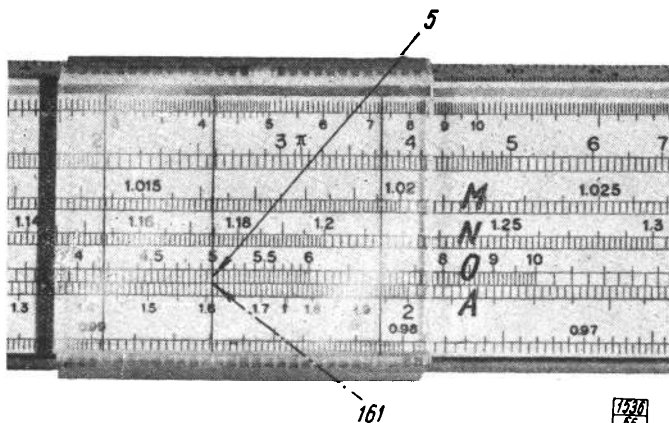
$$\ln a = 2{,}3 \cdot \lg a.$$

Példa : Számítsuk ki ln 25-öt.

A fenti képlet szerint: $\ln 25 = 2{,}3 \cdot \lg 25 = 2{,}3 \cdot 1{,}4 = 3{,}22$.

A léckezeléshez felhasználjuk az *A* és *G* skálát. A szorzást az *A* és *B* skálával végezzük el.

Láttuk tehát, miként lehet a 10 alapú logaritmusból az *e* alapú logaritmust kiszámítani. Láttuk azt is, hogy e számítást nem lehet folytatólagosan elvégezni. E hátrány elkerülésére szolgál az a skálacsoport, amelyet a „Gamma 2512" típusú léc nyelvének hátlapján találunk. E skálákkal való számolás megkönnyítésére ajánlatos a nyelvet átfordítani. A nyelv hátlapján 3 skálát találunk, amelyet *M*, *N* és *O*-val jelöltünk (56. ábra).



56. ábra

E skálákon az *e* alapú hatványokat találjuk. A nyelvet úgy állítsuk be, hogy az *M* skála 1,01 feletti jele a D_1 skála 1-es jelével essék össze.

Példa: $e^{1,61} = 5$ léckezelését fogjuk ismertetni.

Az *A* skála 161 fölé helyezzük a futót és az *O* skálán 5-öt olvasunk le.

A logaritmus definíciója szerint

$$\ln 5 = 1{,}61$$

tehát ha az *O* skálán megkeressük az 5-öt, az *A* skálán leolvassuk e számnak természetes alapú logaritmusát (56. ábra).

Példa: $\ln 2 = 0{,}693$.

Az *N* skálán megkeressük a 2-t és az *A* skálán leolvassuk az eredményt : 0,693-at.

Példa: $\ln 1{,}051 = 0{,}0496$.

Az *M* skálán megkeressük az 1,051-et és az *A* skálán a futó segítségével 496-ot olvasunk le.

A skálák terjedelmére a következő táblázat nyújt felvilágosítást :

VIII. táblázat

Kitevő (leolvasás az *A*) skálán	A hatvány értékei	Leolvasás skálája
0,01—0,1	1,01 —1,105	*M*
0,1 —1	1,105—2,718	*N*
1 —	2,718—	*O*

Példa: $\ln 3 = 1{,}1$.

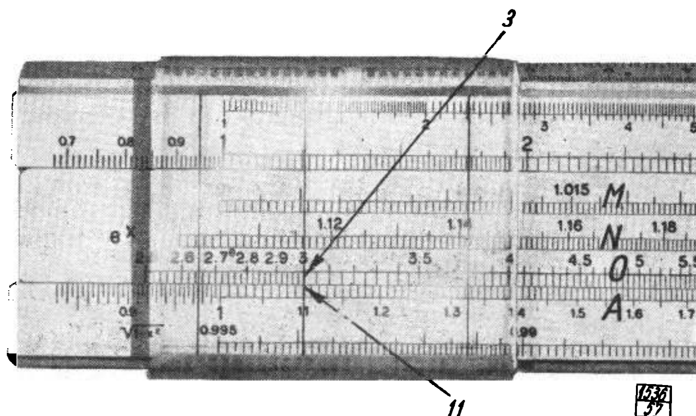
A kitevő e példában 1,1, tehát 1-nél nagyobb szám, ezért az *O* skálát használjuk a számoláshoz (57. ábra).

Példa: $\ln 1{,}296 = 0{,}26$.

A kitevő (0,26) 0,1 — 1 között fekszik, tehát az *N* skálát használjuk a számoláshoz.

Példa: ln 1,0408 = 0,04.

A számoláshoz az *M* skálát használjuk. Ha nem akarjuk a nyelvet megfordítani, a léc hátlapján is leolvashatjuk az eredményt, az olvasójelek felhasználásával azonban célszerűbb a nyelvet átfordítani.



57. ábra

Amennyiben nem fordítottuk át a nyelvet, és a természetes logaritmus alapjának, *e*-nek valamelyik hatványát keressük, úgy az *A* skála 1-eséhez vagy 10-eséhez a *B* skála felhasználásával beállítjuk a kitevőt és az olvasójelnél leolvassuk az eredményt. Gyakorlásul az előző példák valamelyikét használjuk fel.

Ha valamely szám *e*-alapú logaritmusát keressük, a számot beállítjuk a bal olvasójelnél és az *A* skála 1-esénél a *B* skálán olvassuk le az eredményt.

Kettős logaritmus (U. n. „loglog“ számítás)

A szám logaritmusának is van logaritmusa, amelynek kiszámítása és léckezelése az előbbiek alapján már ismeretes. A kettős logaritmus kiszámítását, illetve az ezzel járó léckezelést példákon mutatjuk be.

Példa: $\lg \lg 2 = 0{,}477 - 1$ léckezelését ismertetjük.

A léckezeléshez felhasználjuk az A és G skálát. Leolvassuk a skálákon:

$$\lg 2 = 0{,}3,$$

és ezt követőleg

$$\lg 0{,}3 = 0{,}477 - 1.$$

E két eredményt összefoglalva:

$$\lg \lg 2 = \lg 0{,}3 = 0{,}477 - 1.$$

Példa: $\lg \ln 10 = 0{,}36$ léckezelését ismertetjük.

$\ln 10$ kiszámításához felhasználjuk az O skálát és az eredményt az A skálán olvassuk le: $\ln 10 = 2{,}3$.

Ezt követőleg a futóval megkeressük a G skálán a 23 mantisszáját: 0,36-ot. A karakterisztika ebben az esetben 0 és így

$$\lg 2{,}3 = 0{,}36.$$

E két eredményt összefoglalva (58. ábra):

$$\lg \ln 10 = \lg 2{,}3 = 0{,}36.$$

A kettős logaritmussal való számítás előnyét a következő példán mutatjuk be:

Adott az $a^x = b$ és írjuk fel e kifejezés kettős logaritmusát. Tehát:

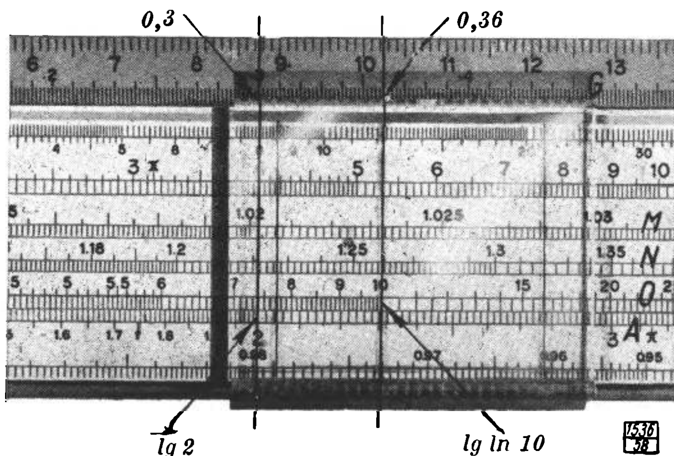
$$x \cdot \lg a = \lg b$$

és újból e kifejezés logaritmusát véve:

$$\lg x + \lg \lg a = \lg \lg b$$

Ha a kitevő törtszám pl. $\frac{1}{x}$, akkor hasonló módon a következő eredményt vezethetjük le:

$$\lg \lg a - \lg x = \lg \lg b.$$



58. ábra

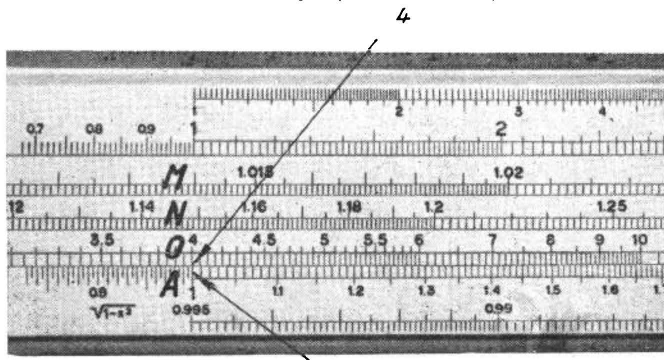
Így elértük azt, hogy a hatványozást, amely harmadrendű művelet, elsőrendű műveletre, tehát összeadásra és kivonásra vezettük vissza.

A léckezelés menetét erre az esetre néhány példán mutatjuk be.

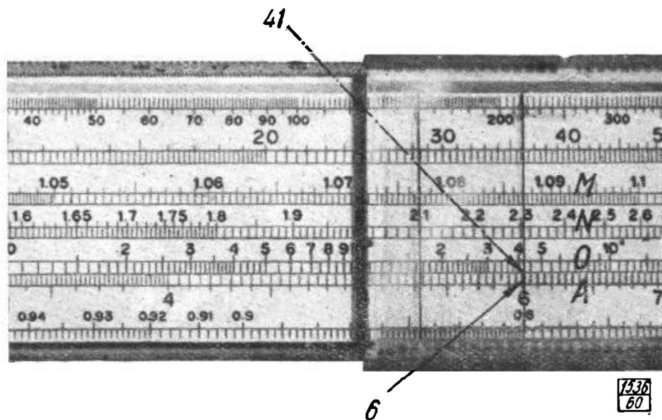
Megjegyezzük még, hogy azok a levezetések, amelyeket a 10 alapú logaritmusra végeztünk el, éppen úgy a természetes alapú logaritmusra is érvényes, így azok ismétlése elmaradhat.

Példa: $4^6 = 4100$ léckezelését ismertetjük.

Az *A* skála 1-ese fölé helyezzük a hatvány alapját, példánkban 4-et, éspedig az *O* skálán. A futóval megkeressük az *A* skálán a kitevőt, 6-ot és vele szemben a *O* skálán leolvassuk az eredményt (59., 60. ábra).



59. ábra

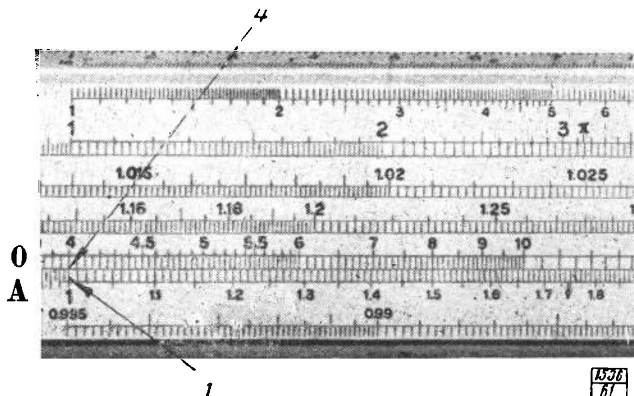


60. ábra

Példa: $25^4 = 391\,000$.

Az *A* skála 10-ese fölé helyezzük az *N* skála 25 jelét és az *A* skála 4-es jele fölött leolvassuk az eredményt.

Példa: $265^4 = 49 \cdot 10^8$.



61. ábra

Az *A* skála 10-es jeléhez helyezzük az *N* skála 265-ét és az *A* skála 4-es jelénél leolvassuk az eredményt.

Példa: $\sqrt[4]{256} = 4$.

Az *A* skála 4-es jelét az *O* skála 256 jeléhez helyezzük. Az *A* skála 1-es jelénél az *O* skálán leolvassuk az eredményt (61., 62. ábra).

Példa: $\sqrt[12]{156} = 1{,}525$.

Az *A* skála 12 jeléhez helyezzük az *O* skála 156-os jelét. Az *A* skála 1-es jelénél az *N* skálán leolvassuk az eredményt.

E példákból láthatjuk, hogy a hatványozásnál az *A* skála 1-esét vagy 10-esét használjuk először a művelet elvégzésénél. A gyökvonásnál, amely, mint láttuk hosszak kivonása, a számokat helyezzük egymás fölé és az 1-nél

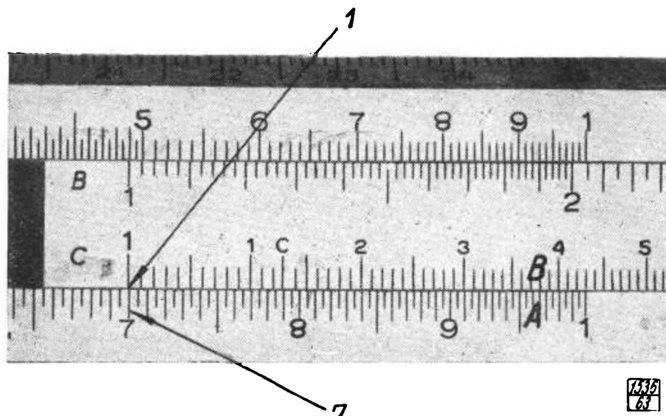
62. ábra

vagy 10-nél olvasunk le. Ezek a szabályok ugyanazok, mint amilyeneket a közönséges osztásnál (hosszak levonása) és szorzásnál (hosszak összeadása) használtunk.

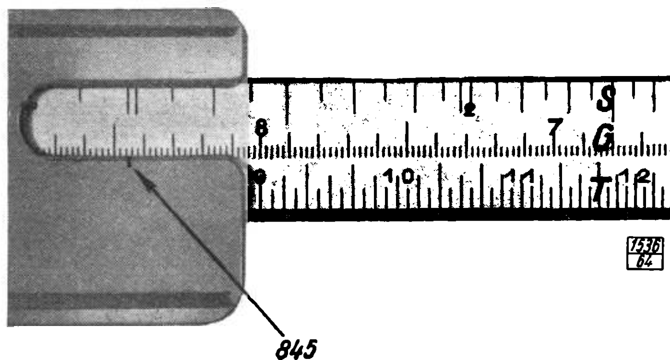
Számos olyan léc van használatban, amelynél a logaritmus osztás a nyelv hátsó felületén van. Ugyancsak a hátsó felületen találjuk az e célra szükséges olvasási jelet. Erre az esetre példát mutatunk be.

Példa: lg 7 = 0,845 léckezelését ismertetjük.

A *B* skála 1-es jelét az *A* skála 7-es jeléhez állítjuk. Megfordítjuk a léctestet és az olvasójel segítségével a logaritmus skálán leolvassuk az eredményt (63., 64. ábra).



63. ábra



64. ábra

M) Szögfüggvények

A szögfüggvények közül a logarlécen a szinuszt és a tangenst találjuk. Az ennek megfelelő skálákat vagy a léc oldalán, vagy a nyelv hátsó felületén helyezik el. A „Gamma 2512” léc oldalán találjuk a szögfüggvények skáláit (l. a 65. ábrát).

A gyakorlatban még használatos koszinuszt és kotangenst a következő képletekkel számítjuk ki :

$$\sin (90° - \beta) = \cos \beta \text{ és } \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{tg} (90° - \beta).$$

Használhatjuk még a következő összefüggést is :

$$\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \beta = 1.$$

Kis szögek szinusza és tangense közel egyenlő a szöghöz tartozó ív hosszával. Némely lécen, mint pl. a Gamma zseblogarlécen külön skálát találunk, amely a szinuszt és a tangenst adja meg 5°44′-ig. Ez 0,1-nek felel meg. Vannak olyan lécek is, amelyeken a szinusz mellé odaírják a pótszög koszinuszát is. Így a 65. ábrán, a sin-cos skálán a 35°-tól balra a 3060, jobbra pedig a 4050 jelet látjuk. Ez annyit jelent, hogy a szóbanforgó vonal a sin 30°-ot és a cos 60°-ot, illetve a sin 40°-ot és a cos 50°-ot jelzi. Ugyanúgy az alsó, a tg-ctg skálán 3060 a tg 30°-ot, illetve a cotg 60°-ot jelöli. A lécen a szinuszt 90°-ig, a tangenst 45°-ig találjuk.

A szögfüggvények léckezelését példákon mutatjuk be.

Példa: sin 3°30‘ $\sim$ tg 3° 30′-et számítsuk ki.

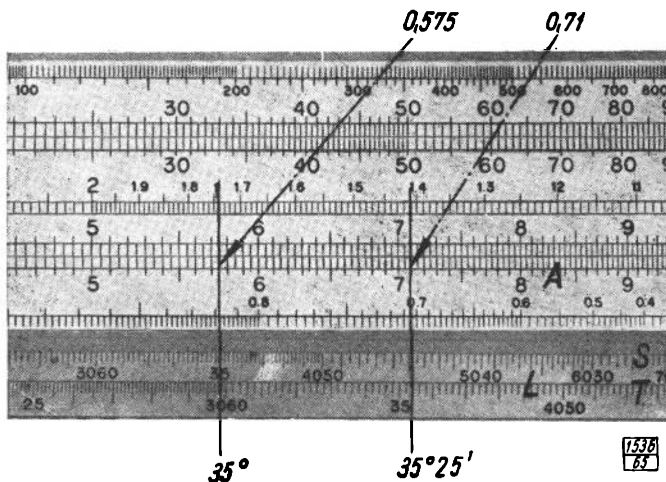
Felhasználhatjuk e számításhoz a léceken található ϱ jeleket.

Példánk esetére :

$$\frac{3}{57,3} + \frac{30}{3438} = 0,0523 + 0,00875 = 0,06105.$$

Azoknál a léceknél, amelyeknél a nyelv hátlapján e kis szögek értékeit is megtaláljuk, éspedig azok szinuszát és tangensét, ott az olvasójelhez állítjuk a 3° 30′-et és az *A* skála 10-esénél leolvassuk a *B* skálán az eredményt.

Példa: sin 35° = 0,575.



65. ábra.

Az oldalskálát: *L*-et használjuk. Megkeressük e skálán a szöget és az *A* skálán leolvassuk az eredményt (65. ábra).

Példa: cos 27° = sin (90° — 27°) = sin 63° = 0,888.

A cos helyett vesszük a pótszög szinuszát, ezt a szöget az *L* skálán megkeressük és a futó segítségével leolvassuk az eredményt az *A* skálán.

Példa: ctg 27° = tg (90° — 27°) = tg 63°.

Ezt az átalakítást nem használhatjuk, mert a lécen a tangenst csak 45°-ig találjuk.

A másik számítási mód szerint:

$$\operatorname{ctg} 27^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 27^\circ} = \frac{1}{0{,}51} = 1{,}96.$$

Ebben az esetben az *A* skálán leolvassuk a szög tangensét, és a reciprok *E* skálán olvassuk le az eredményt.

Példa: tg 35°25′ = 0,71.

A „Gamma 2512" léc *L* skáláján a 35° és 36° közötti osztást öt részre osztják, vagyis egy osztásnak 60 : 5 = 12′ felel meg. Tehát esetünkben a futót e két osztás közötti 2. jelhez állítjuk és az *A* skálán olvassuk le az eredményt (65. ábra).

Ha a „Gamma 2512" lécen ctg-t keresünk, az *E* reciprok skálán minden beállítás nélkül olvashatjuk le az eredményt.

Ha szükséges, a *G* skálán leolvashatjuk a szögfüggvény logaritmusát is minden nyelveltolás nélkül.

Természetesen olyan léceken, amelyeken a szögfüggvények skálái a nyelv hátsó felületén vannak, ez a folytatólagos léckezelés nem lehetséges.

A szög visszakeresése. Ha adott valamely szögfüggvény számértéke, gyakran meg kell keresni a hozzátartozó szöget. Ilyen esetben a szögfüggvény jelzés elé az arc szót teszik.

Példa: arc sin 0,4 = 23°36′.

Tehát keressük azt a szöget, amelynek szinusza 0,4. Az *A* skálán beállítjuk a 4-et és az *L* skálán leolvassuk az eredményt.

Példa: arctg 0,7 = 35°.

Keressük azt a szöget, amelynek tangense 0,7.

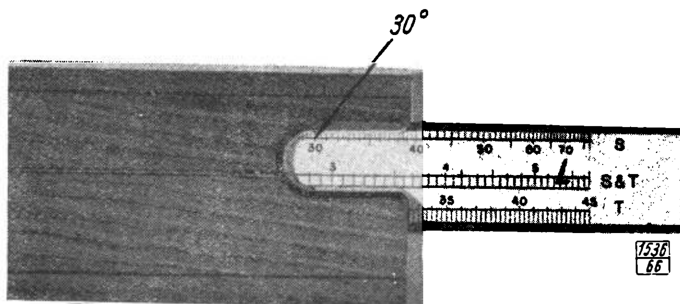
A futót beállítjuk a 7-re és az L skálán leolvassuk az eredményt.

Példa: Számítsuk ki $\sin^2 25° 30'$-et.

A futó segítségével beállítjuk az L skálán a szöget és a D_2 skálán — minden nyelvmozgatás nélkül — leolvassuk az eredményt: 0,184-et.

Példa: Számítsuk ki 13 · ctg 58°-ot.

A következő átalakítást végezzük:



66. ábra

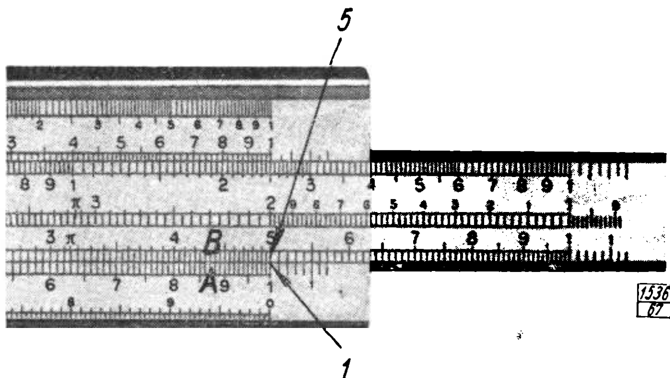
$$13 \cdot \text{ctg}\, 58° = 13 \cdot \text{tg}\, (90° - 58°) = 13 \cdot \text{tg} \cdot 32°.$$

A léckezelés menete a következő:

Az L skálán megkeressük a fokot és a futót ide helyezzük A futó ez állásához kerül a B skála 1-ese és a B skála 13-as jelénél leolvassuk az eredményt: 8,15-ot.

Példa: Számítsuk ki sin 30° = 0,5-et, ha a szögfüggvények L skálái a nyelv hátlapján vannak (66., 67. ábra). Az ábrákon a Gamma zseblogarléc látható.

Az A skála 10(1)-éhez állítjuk a B skála 5-ét és az olvasó jelnél — a fordított lécen — leolvassuk az eredményt.



67. ábra

N) $\sqrt{1-x^2}$ skála lényege és alkalmazása

A „Gamma 2512" lécen e számítást a K skála (l. az 5. ábrát) segítségével végezzük el, amely az A skálával kapcsolódik. Az A skála 0,1—1-ig terjedő x értékeihez kapjuk a K skálán a $\sqrt{1-x^2}$ értékeket.

Példa: Legyen $x = 0{,}8$, akkor $\sqrt{1-x^2} = 0{,}6$.

Beállítjuk a futó karcjelét az A skálán a 8-asra és a K skálán a karcjel segítségével leolvassuk az eredményt, 0,6-et.

Példa: Legyen a derékszögű háromszög két befogója: a és b, átfogója pedig: c, akkor Pythagoras tétele szerint

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ és ebből } a^2 = c^2 - b^2.$$

Osszunk e kifejezés mindkét oldalán c^2-vel és vonjunk négyzetgyököt:

$$\frac{a}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{b^2}{c^2}\right)} = \sqrt{1-x^2},$$

ahol b/c-t x-szel jelöltük. E képlet léckezelésére példát mutatunk be.

Példa: Legyen a derékszögű háromszög átfogója $c = 300$ mm, egyik befogója $b = 50$ mm. Számítsuk ki a másik befogót: a-t.

Ezekkel az adatokkal $x = \frac{b}{c} = \frac{50}{300}$.

A léckezelés a következő:

Az A skálán megkeressük az 5-öt és fölé helyezzük a B skála 3-as jelét. A B skála 1-es jelénél a K skálán leolvassuk a 0,9858-at. A másik befogó hossza: $a = 300 \cdot 0{,}9858 = 295{,}74$ mm.

Példa: Számítsuk ki ezúton cos 35°-ot.

A trigonometriából ismeretes a következő összefüggés: $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ és ebből $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}$. Ha tehát ismerjük $x = \sin\beta$-t, akkor a K skála segítségével a szög koszinuszát kiszámíthatjuk.

Példánk esetére a léckezelés a következő:

Beállítjuk az L szinusz-skáláján a 35°-ot és a K skálán leolvashatjuk az eredményt:

$$\cos 35° = 0{,}818.$$

O) Különleges lécek hivatása és szerepe

A különleges vagy szakmai lécek az általános univerzális lécektől abban különböznek, hogy külön, csak bizonyos szakmában gyakran előforduló képletek számára készülnek megfelelő skálákkal és állandókkal. Ezzel a szóbanforgó szakma körébe eső számításokat a legrövidebb időn belül és legegyszerűbben el lehet végezni. A számolással járó szellemi igénybevétel és kifáradás csökken, de amellett a számolás biztonsága megnövekszik.

A szakmai léceket az jellemzi, hogy a képletek változói, amelyekre a léc készült, közvetlenül szerepelnek a

lécen és a képletekben lévő ismeretlenek a hozzájuk tartozó értékekből minden előzetes átalakítás nélkül kiszámíthatók. Általában emellett a különleges léceken is el lehet végezni mindazokat a műveleteket, amelyekre az univerzális lécek készülnek.

A szakmai lécek előnye annál jelentősebb, minél gyakrabban használt képlettel kapcsolatos számításokra szolgál a léc és minél nehezebben kiszámítható műveletek szerepelnek a képletben, pl. hatványozás, exponenciális függvények stb. E célból a lécek szerkezetét is módosítják, éspedig aszerint, amint a képletben a változók száma nő. Ilyen szerkezeti változás pl. az, hogy a lécen több, rendesen két nyelvet használnak. A nyelvek vagy egymáson, vagy két független vájatban mozognak.

Ezekután röviden ismertetünk néhány gyakran használt szakmai lécet.

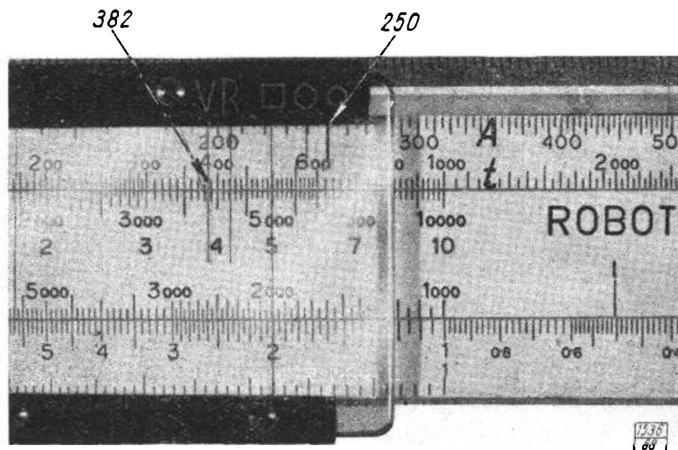
A szakmai lécek közül a legelterjedtebbek az üzemi lécek, amelyek az üzemvezető, a kalkulátor, a művezető napi munkáját megkönnyítik és meggyorsítják. Az ilyen léceken pl. megállapítható a különböző munkagépeken végzett munkák elméleti megmunkálási ideje, a vágósebesség, az anyagok súlya stb. Ilyen a Gamma-gyártmányú „ROBOT” márkájú léc. E lécen a következő jelölések találhatók:

t a megmunkálás ideje (perc), *l* a teljes megmunkálási hossz (mm), *e* az előtolás (mm/ford), *d* az átmérő (mm), *h* a részleges megmunkálási hossz (mm), *v* a vágósebesség (m/perc), *n* a percenkénti fordulatszám. A futón a súlyszámításhoz a következő jelzések találhatók: Al (alumínium), V (vas), R (réz). Az anyag külső alakját a futón látható négyzet, kör és hatszög jelzi. A futón mindegyikhez egy-egy karcjel tartozik.

A Robot-léc kezelését az alábbi példákon mutatjuk be:

Példa: Adott $v = 50$ m/perc, $d = 80$ mm $= 0{,}08$ m, számítsuk ki a vágósebességhez tartozó fordulatszámot.

$$n = \frac{v}{d \cdot 3{,}14} = \frac{50}{0{,}08 \cdot 3{,}14} = 199/\text{perc}.$$



68. ábra. „Robot"-léc

A léckezelés a következő: a v skála 50-es jeléhez állítjuk a d skála 80 jelét és a d skála n jelénél leolvassuk az eredményt.

Példa: 250 mm ∅ vasrúd folyóméterenkénti súlyát számítsuk ki (68. ábra).

A léckezelés a következő: beállítjuk a ◯ jelhez tartozó karcjelet az A skála 250 jeléhez és a t skálán a futó V karcjelénél leolvassuk az eredményt: 382 kg-ot.

Különleges lécek sok szakma részére készülnek, így pl.: elektrotechnika, kereskedelem, vasbeton, vegyi szak-

mák részére, továbbá súlyszámításokhoz, faköbözésekhez stb.

A legelterjedtebb léc az elektromos léc. Ezen a vezeték ohmos ellenállását, a feszültségesést a huzalban és a vezetékek keresztmetszetét közvetlenül lehet kiszámítani. A lécen szereplő állandók felhasználásával a szabad vezetékek behajlását is meg lehet állapítani.

A kereskedelmi léccel a kereskedelemben előforduló számításokat lehet elvégezni, abban az esetben, ha 3 jegy pontosság elegendő.

A szakmai lécekhez használati utasítást mellékelnek, amelyből a léc kezelése könnyen elsajátítható, föltéve, hogy az általános léc kezelésével már tisztában vagyunk.

TARTALOMJEGYZÉK